Vsakdanji problemi - matematične rešitve (Zgledi uporabe dominacije v grafih)

Nina Chiarelli

UP FAMNIT, Koper, Marec 2019

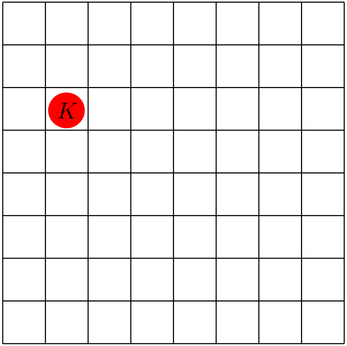
Outline

Outline

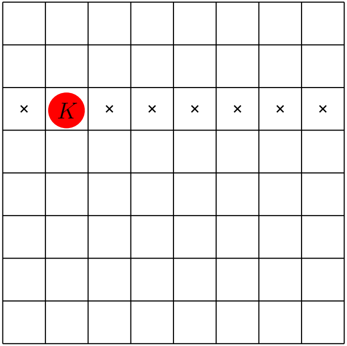
Leta 1862 je *de Jaenisch* skušal odgovoriti na sledeče vprašanje:

Leta 1862 je *de Jaenisch* skušal odgovoriti na sledeče vprašanje:

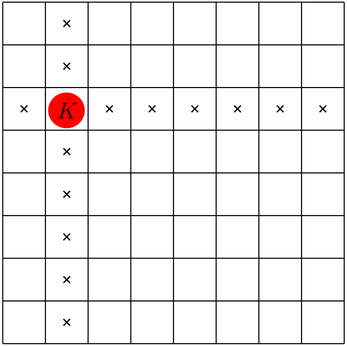
Kolikšno je najmanjše število kraljic, ki jih potrebujemo, da pokrijemo šahovnico velikosti $n \times n$?



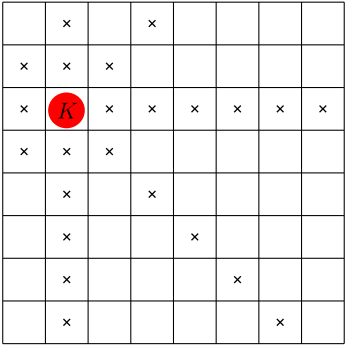
Kraljica se lahko v eni potezi premakne za poljubno število polj vertikalno, horizontalno ali diagonalno.



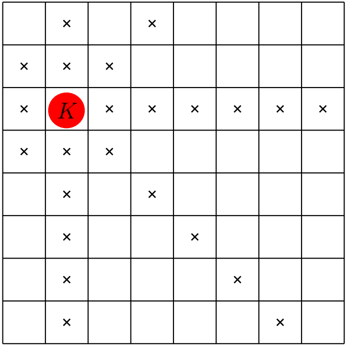
Kraljica se lahko v eni potezi premakne za poljubno število polj vertikalno, horizontalno ali diagonalno.



Kraljica se lahko v eni potezi premakne za poljubno število polj vertikalno, horizontalno ali diagonalno.



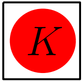
Kraljica se lahko v eni potezi premakne za poljubno število polj vertikalno, horizontalno ali diagonalno.



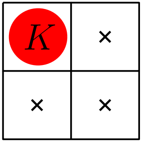
Kraljica se lahko v eni potezi premakne za poljubno število polj vertikalno, horizontalno ali diagonalno.

Pokriti šahovnico pomeni, da razporedimo kraljice po šahovnici tako, da lahko z eno potezo pridemo do poljubnega polja na šahovnici.

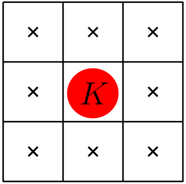
- šahovnica velikosti 1×1
- šahovnica velikosti 2×2
- šahovnica velikosti 3×3
- šahovnica velikosti 4×4



- šahovnica velikosti 1×1
- šahovnica velikosti 2×2
- šahovnica velikosti 3×3
- šahovnica velikosti 4×4



- šahovnica velikosti 1×1
- šahovnica velikosti 2×2
- šahovnica velikosti 3×3
- šahovnica velikosti 4×4

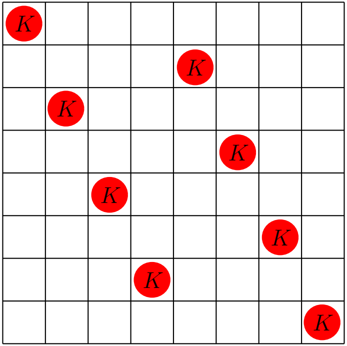


- šahovnica velikosti 1×1
- šahovnica velikosti 2×2
- šahovnica velikosti 3×3
- šahovnica velikosti 4×4

×	×	×	×
×	K	K	×
×	×	×	×
×	×	×	×

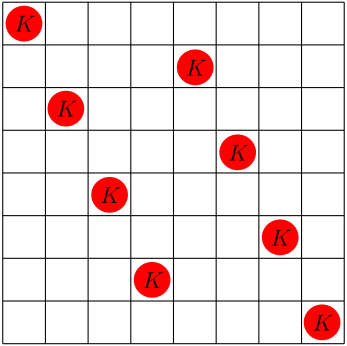
šahovnica velikosti 8×8

Primer postavitve 8 kraljic

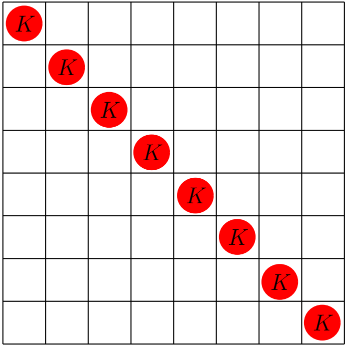


šahovnica velikosti 8×8

Primer postavitve 8 kraljic

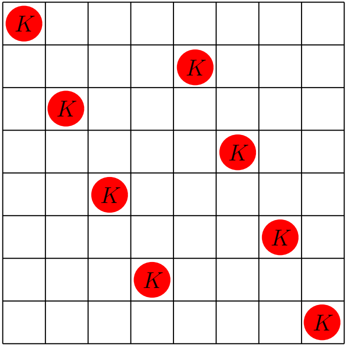


...zadostuje jih tudi manj

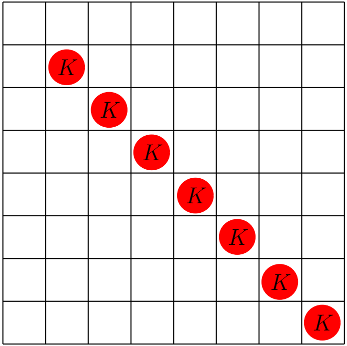


šahovnica velikosti 8×8

Primer postavitve 8 kraljic

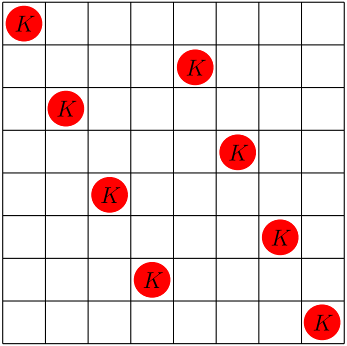


...zadostuje jih tudi manj

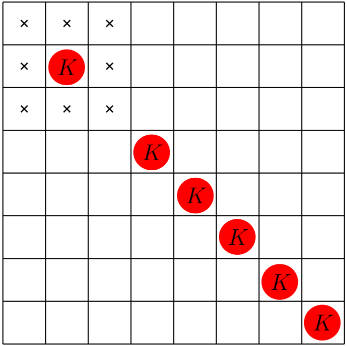


šahovnica velikosti 8×8

Primer postavitve 8 kraljic



...zadostuje jih tudi manj



šahovnica velikosti 8×8

Primer postavitve 8 kraljic

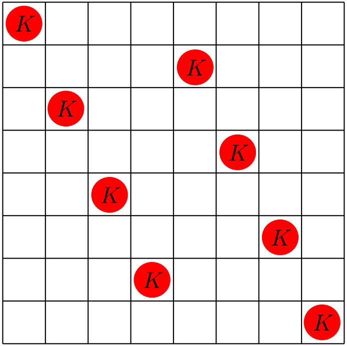
K							
				K			
	K						
					K		
		K					
						K	
			K				
							K

...zadostuje jih tudi manj

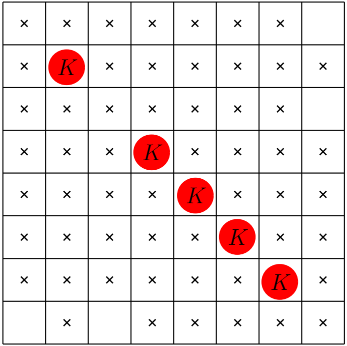
×	×	×	×	×	×	×	
×	K	×	×	×	×	×	×
×	×	×	×	×	×	×	
×	×	×	K	×	×	×	×
×	×	×	×	K	×	×	×
×	×	×	×	×	K	×	×
×	×	×	×	×	×	K	×
	×		×	×	×	×	×

šahovnica velikosti 8×8

Primer postavitve 8 kraljic



...zadostuje jih tudi manj



Steinhaus leta 1999 pokaže, da lahko šahovnico velikosti 8×8 pokrijemo že s 5 kraljicami.

Od šahovnice do grafov

- 1862: de Jaenisch-evo vprašanje o kraljicah

Od šahovnice do grafov

- 1862: de Jaenisch-evo vprašanje o kraljicah
  do 1900 vprašanje požanje veliko zanimanja in porodi še vrsto drugih (podobnih) vprašanj:

Od šahovnice do grafov

- 1862: de Jaenisch-evo vprašanje o kraljicah
  do 1900 vprašanje požanje veliko zanimanja in porodi še vrsto drugih (podobnih) vprašanj:
  - Kolikšno je najmanjše število določenih šahovskih figur, ki ji potrebujemo, da pokrijemo šahovnico velikosti $n \times n$?

Od šahovnice do grafov

- 1862: de Jaenisch-evo vprašanje o kraljicah
  do 1900 vprašanje požanje veliko zanimanja in porodi še vrsto drugih (podobnih) vprašanj:
  - Kolikšno je najmanjše število določenih šahovskih figur, ki ji potrebujemo, da pokrijemo šahovnico velikosti $n \times n$?
  - Kolikšno je najmanjše število določenih šahovskih figur, ki ji potrebujemo, da pokrijemo šahovnico velikosti $n \times n$ tako, da se postavljene figure medsebojno ne napadajo?

Od šahovnice do grafov

- 1862: de Jaenisch-evo vprašanje o kraljicah
  do 1900 vprašanje požanje veliko zanimanja in porodi še vrsto drugih (podobnih) vprašanj:
  - Kolikšno je najmanjše število določenih šahovskih figur, ki ji potrebujemo, da pokrijemo šahovnico velikosti $n \times n$?
  - Kolikšno je najmanjše število določenih šahovskih figur, ki ji potrebujemo, da pokrijemo šahovnico velikosti $n \times n$ tako, da se postavljene figure medsebojno ne napadajo?
  - Kolikšno je največje število določenih šahovskih figur, ki ji lahko postavimo na šahovnico velikosti $n \times n$ tako, da se postavljene figure medsebojno ne napadajo?

Od šahovnice do grafov

- 1862: de Jaenisch-evo vprašanje o kraljicah
  do 1900 vprašanje požanje veliko zanimanja in porodi še vrsto drugih (podobnih) vprašanj:
  - Kolikšno je najmanjše število določenih šahovskih figur, ki ji potrebujemo, da pokrijemo šahovnico velikosti $n \times n$?
  - Kolikšno je najmanjše število določenih šahovskih figur, ki ji potrebujemo, da pokrijemo šahovnico velikosti $n \times n$ tako, da se postavljene figure medsebojno ne napadajo?
  - Kolikšno je največje število določenih šahovskih figur, ki ji lahko postavimo na šahovnico velikosti $n \times n$ tako, da se postavljene figure medsebojno ne napadajo?
- 1964: brata Yaglom objavita odgovore na nekatera zgornja vprašanja za primere trdnjave, kralja, skakača (konja) in lovca.

Od šahovnice do grafov

- 1958: Berge v knjigi o teoriji grafov prvič definira koncept dominantnega števila

Od šahovnice do grafov

- 1958: Berge v knjigi o teoriji grafov prvič definira koncept dominantnega števila
- 1962: Oystein in Ore v knjigi o teoriji grafov prvič uporabita izraza dominantna množica in dominantno število

Od šahovnice do grafov

- 1958: Berge v knjigi o teoriji grafov prvič definira koncept dominantnega števila
- 1962: Oystein in Ore v knjigi o teoriji grafov prvič uporabita izraza dominantna množica in dominantno število
- 1977: Cockayne in Hedetniemi v preglednem članku uvedeta notacijo za dominantno število

Od šahovnice do grafov

- 1958: Berge v knjigi o teoriji grafov prvič definira koncept dominantnega števila
- 1962: Oystein in Ore v knjigi o teoriji grafov prvič uporabita izraza dominantna množica in dominantno število
- 1977: Cockayne in Hedetniemi v preglednem članku uvedeta notacijo za dominantno število

V naslednjih dvajsetih letih nastane preko 1.200 člankov o dominaciji v grafih.

Od šahovnice do grafov

- 1958: Berge v knjigi o teoriji grafov prvič definira koncept dominantnega števila
- 1962: Oystein in Ore v knjigi o teoriji grafov prvič uporabita izraza dominantna množica in dominantno število
- 1977: Cockayne in Hedetniemi v preglednem članku uvedeta notacijo za dominantno število

V naslednjih dvajsetih letih nastane preko 1.200 člankov o dominaciji v grafih.
Pojavijo se nove variante dominacije.

Outline

Kaj je graf?

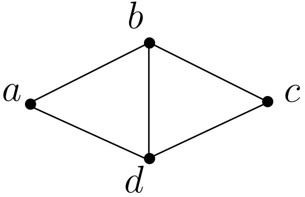
Graf je matematični objekt, ki sestoji iz množice točk (V) in množice povezav (E).

Kaj je graf?

Graf je matematični objekt, ki sestoji iz množice točk (V) in množice povezav (E).
Povezave so dvoelementne podmnožice množice točk.

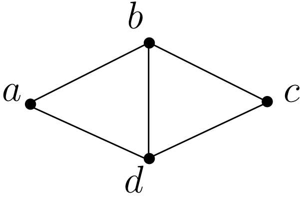
Kaj je graf?

Graf je matematični objekt, ki sestoji iz množice točk (V) in množice povezav (E).
Povezave so dvoelementne podmnožice množice točk.



Kaj je graf?

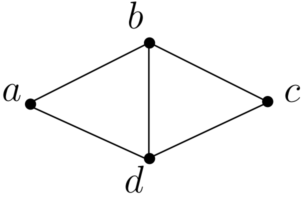
Graf je matematični objekt, ki sestoji iz množice točk (V) in množice povezav (E).
Povezave so dvoelementne podmnožice množice točk.



$$V = \{a, b, c, d\}$$

Kaj je graf?

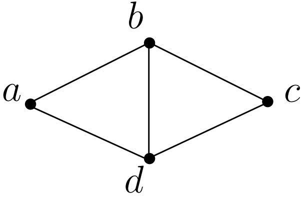
Graf je matematični objekt, ki sestoji iz množice točk (V) in množice povezav (E).
Povezave so dvoelementne podmnožice množice točk.



$V = \{a, b, c, d\}$
$E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$

Kaj je graf?

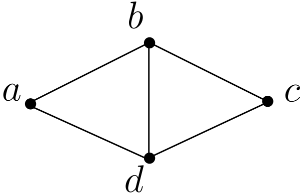
Graf je matematični objekt, ki sestoji iz množice točk (V) in množice povezav (E).
Povezave so dvoelementne podmnožice množice točk.



$V = \{a, b, c, d\}$
$E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$
zapis povezav običajno poenostavimo:
$E = \{ab, ad, bc, bd, cd\}$

Kaj je graf?

Graf je matematični objekt, ki sestoji iz množice točk (V) in množice povezav (E).
Povezave so dvoelementne podmnožice množice točk.



$V = \{a, b, c, d\}$
$E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$
zapis povezav običajno poenostavimo:
$E = \{ab, ad, bc, bd, cd\}$

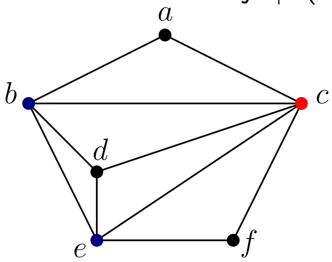
Soseščina točke x (oznaka: $N(x)$) je množica vseh točk $v \in V$, za katere velja $xv \in E$.

Kdaj je neka podmnožica točk v grafu dominantna?

Dominantna množica je taka podmnožica točk $S \subseteq V$, da za vsako točko $v \in V - S$ velja $|N(v) \cap S| \geq 1$.

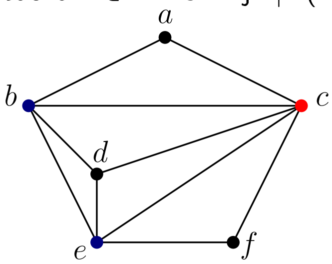
Kdaj je neka podmnožica točk v grafu dominantna?

Dominantna množica je taka podmnožica točk $S \subseteq V$, da za vsako točko $v \in V - S$ velja $|N(v) \cap S| \geq 1$.



Kdaj je neka podmnožica točk v grafu dominantna?

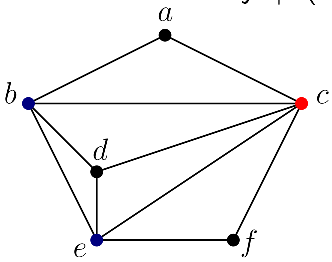
Dominantna množica je taka podmnožica točk $S \subseteq V$, da za vsako točko $v \in V - S$ velja $|N(v) \cap S| \geq 1$.



$S_1 = \{a, f, e\}$,

Kdaj je neka podmnožica točk v grafu dominantna?

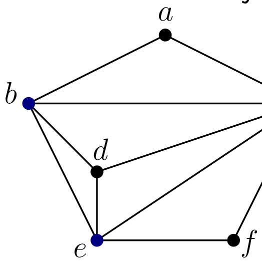
Dominantna množica je taka podmnožica točk $S \subseteq V$, da za vsako točko $v \in V - S$ velja $|N(v) \cap S| \geq 1$.



$S_1 = \{a, f, e\}$, $S_2 = \{a, b, e\}$

Kdaj je neka podmnožica točk v grafu dominantna?

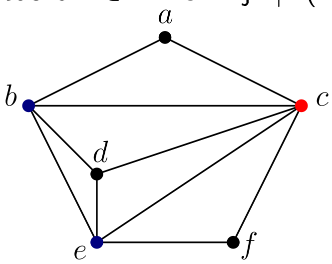
Dominantna množica je taka podmnožica točk $S \subseteq V$, da za vsako točko $v \in V - S$ velja $|N(v) \cap S| \geq 1$.



$S_1 = \{a, f, e\}$, $S_2 = \{a, b, e\}$
$S_3 = \{a, d, f\}$,

Kdaj je neka podmnožica točk v grafu dominantna?

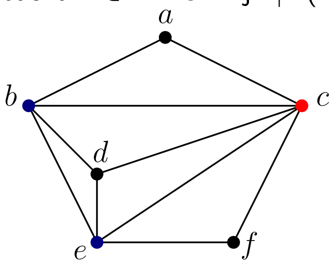
Dominantna množica je taka podmnožica točk $S \subseteq V$, da za vsako točko $v \in V - S$ velja $|N(v) \cap S| \geq 1$.



$S_1 = \{a, f, e\}$, $S_2 = \{a, b, e\}$
$S_3 = \{a, d, f\}$, $S_4 = \{b, e\}$,

Kdaj je neka podmnožica točk v grafu dominantna?

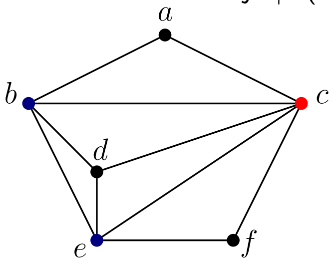
Dominantna množica je taka podmnožica točk $S \subseteq V$, da za vsako točko $v \in V - S$ velja $|N(v) \cap S| \geq 1$.



$S_1 = \{a, f, e\}$, $S_2 = \{a, b, e\}$
$S_3 = \{a, d, f\}$,$S_4 = \{b, e\}$, $S_5 = \{c\}$

Kdaj je neka podmnožica točk v grafu dominantna?

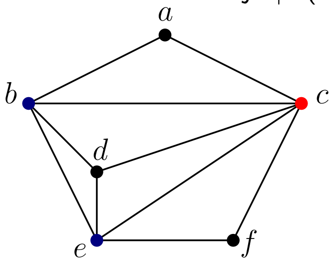
Dominantna množica je taka podmnožica točk $S \subseteq V$, da za vsako točko $v \in V - S$ velja $|N(v) \cap S| \geq 1$.



$S_1 = \{a, f, e\}$, $S_2 = \{a, b, e\}$
$S_3 = \{a, d, f\}$, $S_4 = \{b, e\}$, $S_5 = \{c\}$
Množicam S_3, S_4 in S_5 pravimo *minimalne dominantne množice*.

Kdaj je neka podmnožica točk v grafu dominantna?

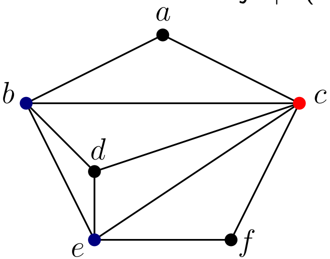
Dominantna množica je taka podmnožica točk $S \subseteq V$, da za vsako točko $v \in V - S$ velja $|N(v) \cap S| \geq 1$.



$S_1 = \{a, f, e\}$, $S_2 = \{a, b, e\}$
$S_3 = \{a, d, f\}$,$S_4 = \{b, e\}$, $S_5 = \{c\}$
Množicam S_3, S_4 in S_5 pravimo *minimalne dominantne množice*.
Množica S_5 je tudi *najmanjša dominantna množica*.

Kdaj je neka podmnožica točk v grafu dominantna?

Dominantna množica je taka podmnožica točk $S \subseteq V$, da za vsako točko $v \in V - S$ velja $|N(v) \cap S| \geq 1$.



$S_1 = \{a, f, e\}$, $S_2 = \{a, b, e\}$
$S_3 = \{a, d, f\}$,$S_4 = \{b, e\}$, $S_5 = \{c\}$
Množicam S_3, S_4 in S_5 pravimo *minimalne dominantne množice*.
Množica S_5 je tudi *najmanjša dominantna množica*.

Dominantno število grafa G (oznaka: $\gamma(G)$) je velikost njegove najmanjše dominantne množice.

Outline

Problem

Želimo postaviti radijske oddajnike na nekem širšem območju z manjšimi vasmi. Ker so radijski oddajniki dragi, bi jih želeli postaviti čim manj. Vandar imajo radijski oddajniki omejen domet. Kako rešiti problem?

Problem

Želimo postaviti radijske oddajnike na nekem širšem območju z manjšimi vasmi. Ker so radijski oddajniki dragi, bi jih želeli postaviti čim manj. Vandar imajo radijski oddajniki omejen domet.
Kako rešiti problem?
Vsako vas predstavimo s točko

Problem

Želimo postaviti radijske oddajnike na nekem širšem območju z manjšimi vasmi. Ker so radijski oddajniki dragi, bi jih želeli postaviti čim manj. Vandar imajo radijski oddajniki omejen domet. Kako rešiti problem?
Vsako vas predstavimo s točko in vasi med seboj povežemo s povezavo, če vmes ni objektov, ki bi preprečevali širjenje signala.

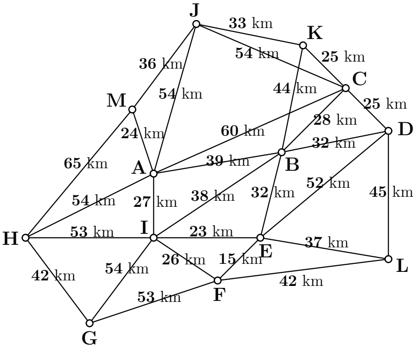
Problem

Želimo postaviti radijske oddajnike na nekem širšem območju z manjšimi vasmi. Ker so radijski oddajniki dragi, bi jih želeli postaviti čim manj. Vandar imajo radijski oddajniki omejen domet. Kako rešiti problem?
Vsako vas predstavimo s točko in vasi med seboj povežemo s povezavo, če vmes ni objektov, ki bi preprečevali širjenje signala. Vsaki povezavi med vasmi dodamo še informacijo o zračni razdalji med vasema.

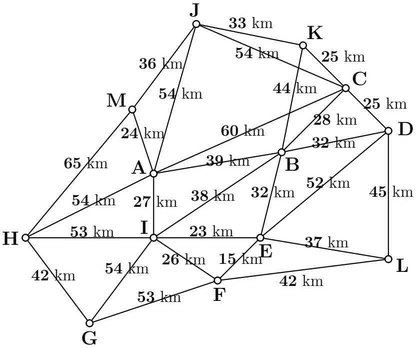
Problem

Želimo postaviti radijske oddajnike na nekem širšem območju z manjšimi vasmi. Ker so radijski oddajniki dragi, bi jih želeli postaviti čim manj. Vandar imajo radijski oddajniki omejen domet. Kako rešiti problem?
Vsako vas predstavimo s točko in vasi med seboj povežemo s povezavo, če vmes ni objektov, ki bi preprečevali širjenje signala. Vsaki povezavi med vasmi dodamo še informacijo o zračni razdalji med vasema.
Rešitev bo sedaj odvisna od dometa oddajnika.

Primer

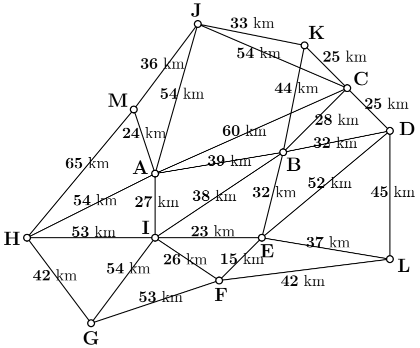

J
K
C
D
M
A
B
H
I
E
L
F
G
33 km
25 km
54 km
36 km
54 km
44 km
25 km
28 km
60 km
24 km
32 km
65 km
39 km
54 km
27 km
38 km
32 km
52 km
45 km
53 km
23 km
37 km
42 km
54 km
26 km
15 km
42 km
53 km

Primer



Koliko oddajnikov potrebujemo, če je domet oddajnika 50 km?

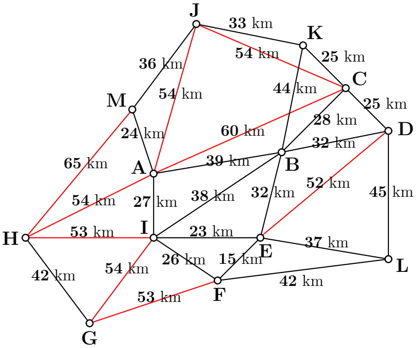
Primer



Koliko oddajnikov potrebujemo, če je domet oddajnika 50 km?

Povezave, ki presegajo domet, lahko iz grafa odstranimo.

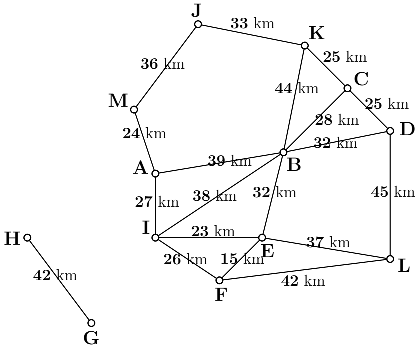
Primer



Koliko oddajnikov potrebujemo, če je domet oddajnika 50 km?

Povezave, ki presegajo domet, lahko iz grafa odstranimo.

Primer

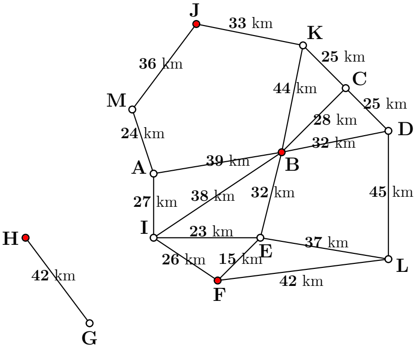


Koliko oddajnikov potrebujemo, če je domet oddajnika 50 km?

Povezave, ki presegajo domet, lahko iz grafa odstranimo.

Naš graf se nekoliko poenostavi in problem lahko rešimo tako, da v novem grafu poiščemo najmanjšo dominantno množico.

Primer



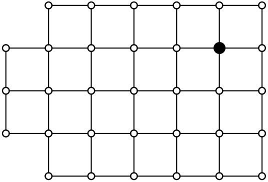
Koliko oddajnikov potrebujemo, če je domet oddajnika 50 km?
Povezave, ki presegajo domet, lahko iz grafa odstranimo.
Naš graf se nekoliko poenostavi in problem lahko rešimo tako, da v novem grafu poiščemo najmanjšo dominantno množico.

Problem

Večina ameriških šol svojim učencem nudi prevoz v in iz šole. Običajno se pri načrtovanju postankov držijo določenih pravil.

Problem

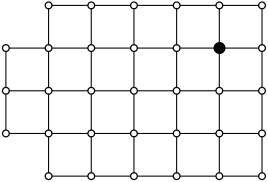
Večina ameriških šol svojim učencem nudi prevoz v in iz šole. Običajno se pri načrtovanju postankov držijo določenih pravil.



Recimo, da slika predstavlja cestno omrežje dela mesta, v katerem je vsako križišče točka in vsaka povezava 1 ulica. Šola se nahaja, kjer je črna točka.

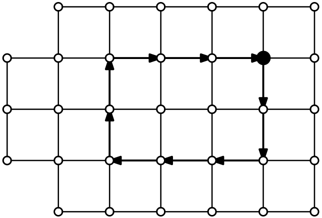
Problem

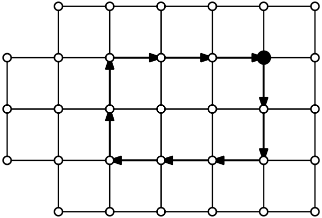
Večina ameriških šol svojim učencem nudi prevoz v in iz šole. Običajno se pri načrtovanju postankov držijo določenih pravil.



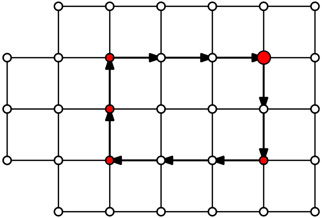
Recimo, da slika predstavlja cestno omrežje dela mesta, v katerem je vsako križišče točka in vsaka povezava 1 ulica. Šola se nahaja, kjer je črna točka.

Kje naj ima avtobus postanke, če ima šola pravilo, da lahko učenec prehoditi največ 2 ulici do šole ali najbližje postaje?

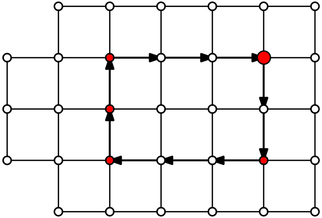




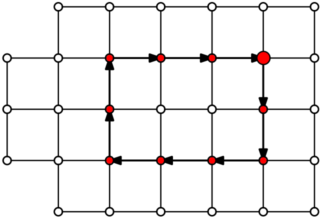
Koliko postankov predvideva rešitev na sliki?



Koliko postankov predvideva rešitev na sliki?

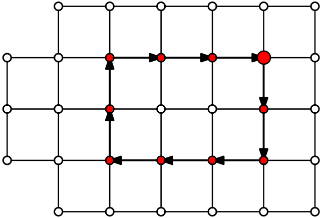


Koliko postankov predvideva rešitev na sliki?
Kaj pa če se moramo ustaviti v vsakem križišču?



Koliko postankov predvideva rešitev na sliki?

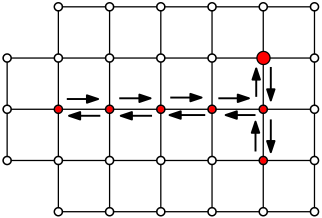
Kaj pa če se moramo ustaviti v vsakem križišču?



Koliko postankov predvideva rešitev na sliki?

Kaj pa če se moramo ustaviti v vsakem križišču?

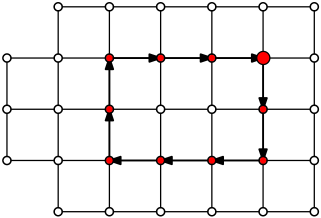
Ali je podana rešitev z upoštevanjem dodatnih zahtev optimalna?

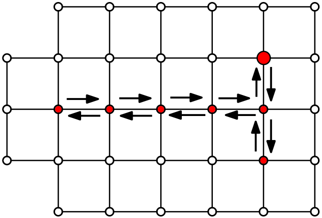


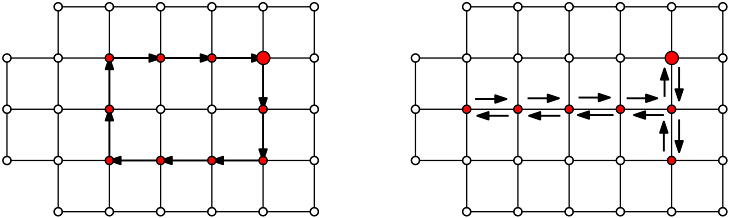
Koliko postankov predvideva rešitev na sliki?

Kaj pa če se moramo ustaviti v vsakem križišču?

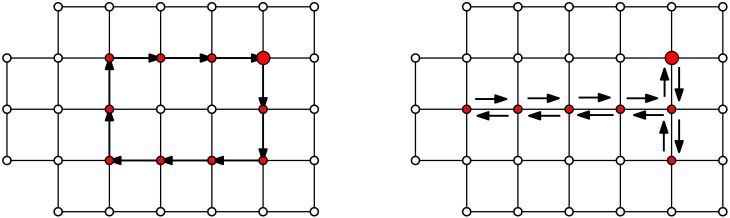
Ali je podana rešitev z upoštevanjem dodatnih zahtev optimalna?







Obe podani možnosti predstavljata rešitev problema razdaljne - 2 - dominacije, ker so točke, v katerih postanki niso predvideni, na razdalji največ 2 od točk, kjer so postanki predvideni.



Obe podani možnosti predstavljata rešitev problema razdaljne - 2 - dominacije, ker so točke, v katerih postanki niso predvideni, na razdalji največ 2 od točk, kjer so postanki predvideni.
Obe podani možnosti predstavljata tudi povezani dominantni množici (če iz grafa izbrišemo vse točke, v katerih niso predvideni postanki, ostane povezan podgraf).

Problem

Imamo skupino ljudi z različnimi lastnostmi.
Želimo sestaviti odbor s čim manjšim številom članov tako, da bo vsak, ki ni v odboru imel nekaj skupnega z vsaj enim članom odbora.

Problem

Imamo skupino ljudi z različnimi lastnostmi.
Želimo sestaviti odbor s čim manjšim številom članov tako, da bo vsak, ki ni v odboru imel nekaj skupnega z vsaj enim članom odbora.
Kako nam pri tem pomaga dominacija v grafu?

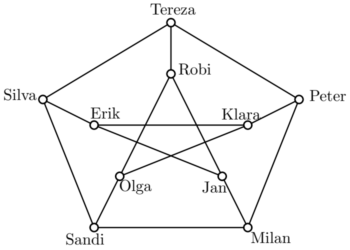
Problem

Imamo skupino ljudi z različnimi lastnostmi.
Želimo sestaviti odbor s čim manjšim številom članov tako, da bo vsak, ki ni v odboru imel nekaj skupnega z vsaj enim članom odbora.
Kako nam pri tem pomaga dominacija v grafu?
Če vsakega človeka predstavimo s točko in dodamo povezavo med dvema točkama, ko imata osebi nekaj skupnega, dobimo graf.

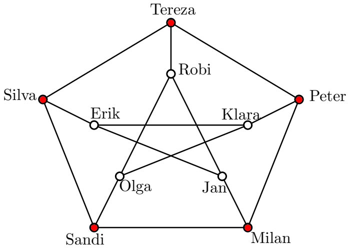
Problem

Imamo skupino ljudi z različnimi lastnostmi.
Želimo sestaviti odbor s čim manjšim številom članov tako, da bo vsak, ki ni v odboru imel nekaj skupnega z vsaj enim članom odbora.
Kako nam pri tem pomaga dominacija v grafu?
Če vsakega človeka predstavimo s točko in dodamo povezavo med dvema točkama, ko imata osebi nekaj skupnega, dobimo graf.
V tako dobljenem grafu želimo sedaj poiskati najmanjšo dominantno množico.

Primer

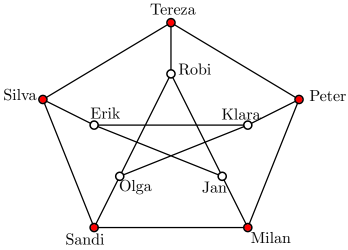


Primer



Rdeče obarvane točke predstavljajo minimalno dominantno množico.

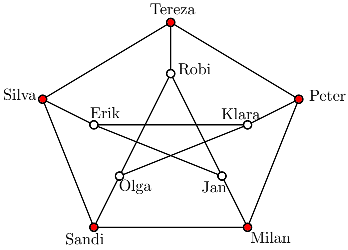
Primer



Rdeče obarvane točke predstavljajo minimalno dominantno množico.

Je to tudi najmanjša dominantna množica?

Primer

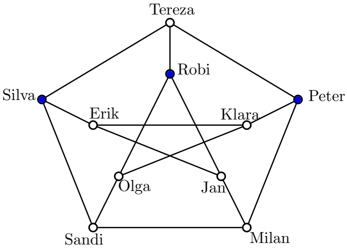


Rdeče obarvane točke predstavljajo minimalno dominantno množico.

Je to tudi najmanjša dominantna množica?

Ni.

Primer

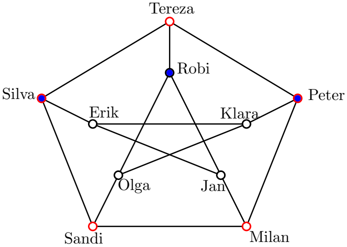


Rdeče obarvane točke predstavljajo minimalno dominantno množico.

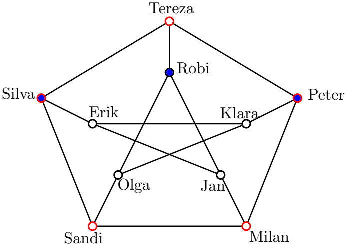
Je to tudi najmanjša dominantna množica?

Ni.$S = \{\text{Silva, Robi, Peter}\}$ je manjša.

Opazimo še...

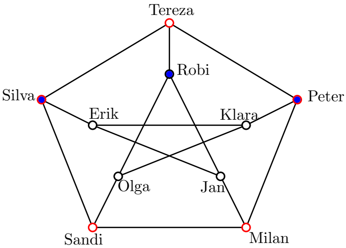


Opazimo še...



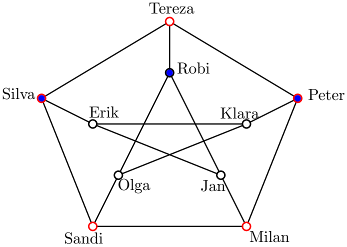
Rdeče obkrožene točke predstavljajo povezano dominantno množico,

Opazimo še...

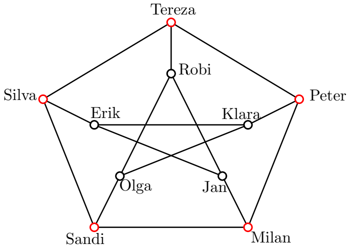


Rdeče obkrožene točke predstavljajo povezano dominantno množico, medtem ko med modrimi točkami ni nobene povezave.

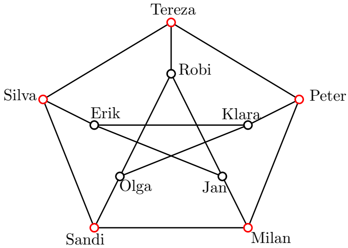
Opazimo še...



Rdeče obkrožene točke predstavljajo povezano dominantno množico, medtem ko med modrimi točkami ni nobene povezave.
Modro obarvane točke predstavljajo neodvisno dominantno množico.

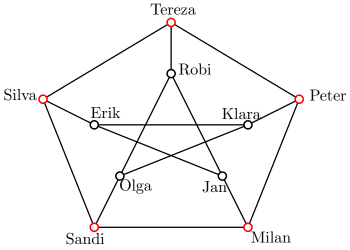


Če privzamemo, da se osebe, ki so povezane, med samo tudi poznajo, ima množica rdeče obkroženih točk še eno last-nost:



Če privzamemo, da se osebe, ki so povezane, med samo tudi poznajo, ima množica rdeče obkroženih točk še eno last-nost:

Vsaka rdeče obkrožena točka ima v svoji soseščini rdeče obkroženo točko.



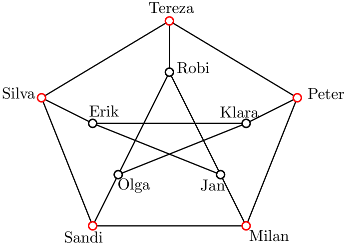
Če privzamemo, da se osebe, ki so povezane, med samo tudi poznajo, ima množica rdeče obkroženih točk še eno lastnost:

Vsaka rdeče obkrožena točka ima v svoji soseščini rdeče obkroženo točko.

To bi ustrezalo npr. zahtevi, da vsak član odbora pozna vsaj še enega člana odbora.

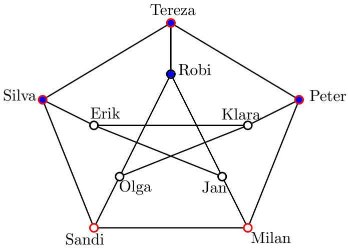
Če definicijo dominantne množice spremenimo tako, da za vsako točko $v \in V$ zahtevamo $|N(v) \cap S| \geq 1$, potem govorimo o totalno dominantni množici.

Če definicijo dominantne množice spremenimo tako, da za vsako točko $v \in V$ zahtevamo $|N(v) \cap S| \geq 1$, potem govorimo o totalno dominantni množici.
Sedaj se lahko vprašamo, ali je rešitev, ki jo imamo, najmanjša totalno dominantna množica v danem grafu?



Če definicijo dominantne množice spremenimo tako, da za vsako točko $v \in V$ zahtevamo $|N(v) \cap S| \geq 1$, potem govorimo o totalno dominantni množici.

Sedaj se lahko vprašamo, ali je rešitev, ki jo imamo, najmanjša totalno dominantna množica v danem grafu?



Problem

Skupino ljudi želimo poslati, da razišče nek neznani del sveta. Za ta namen so seveda potrebne določene veščine...

Problem

Skupino ljudi želimo poslati, da razišče nek neznani del sveta. Za ta namen so seveda potrebne določene veščine...
Potrebujemo: botanika, zoologa, gradbenika, novinarja, kuharja, geologa, zgodovinarja, pilota, fizika in fotografa.

Problem

Skupino ljudi želimo poslati, da razišče nek neznani del sveta. Za ta namen so seveda potrebne določene veščine...
Potrebujemo: botanika, zoologa, gradbenika, novinarja, kuharja, geologa, zgodovinarja, pilota, fizika in fotografa.
Vendar je stroškovno prevelik zalogaj, da bi na ekspedicijo poslali 10 ljudi...

Problem

Skupino ljudi želimo poslati, da razišče nek neznani del sveta. Za ta namen so seveda potrebne določene veščine...
Potrebujemo: botanika, zoologa, gradbenika, novinarja, kuharja, geologa, zgodovinarja, pilota, fizika in fotografa.
Vendar je stroškovno prevelik zalogaj, da bi na ekspedicijo poslali 10 ljudi...in zagotovo je med temi 10 ljudmi tudi kakšen, ki ima več kot 1 potrebno veščino.

Problem

Skupino ljudi želimo poslati, da razišče nek neznani del sveta. Za ta namen so seveda potrebne določene veščine...
Potrebujemo: botanika, zoologa, gradbenika, novinarja, kuharja, geologa, zgodovinarja, pilota, fizika in fotografa.
Vendar je stroškovno prevelik zalogaj, da bi na ekspedicijo poslali 10 ljudi...in zagotovo je med temi 10 ljudmi tudi kakšen, ki ima več kot 1 potrebno veščino. Koliko najmanj ljudi moramo poslati na ekspedicijo?

Problem

Skupino ljudi želimo poslati, da razišče nek neznani del sveta. Za ta namen so seveda potrebne določene veščine...
Potrebujemo: botanika, zoologa, gradbenika, novinarja, kuharja, geologa, zgodovinarja, pilota, fizika in fotografa.
Vendar je stroškovno prevelik zalogaj, da bi na ekspedicijo poslali 10 ljudi...in zagotovo je med temi 10 ljudmi tudi kakšen, ki ima več kot 1 potrebno veščino. Koliko najmanj ljudi moramo poslati na ekspedicijo?
Tudi ta problem lahko ponazorimo s pomočjo grafa. Imamo 2 tipa točk, ene, ki predstavljajo ljudi in ene, ki predstavljajo veščine. Povezave sedaj povezujejo človeka z veščinami, ki jih ima.

Problem

Skupino ljudi želimo poslati, da razišče nek neznani del sveta. Za ta namen so seveda potrebne določene veščine...
Potrebujemo: botanika, zoologa, gradbenika, novinarja, kuharja, geologa, zgodovinarja, pilota, fizika in fotografa.
Vendar je stroškovno prevelik zalogaj, da bi na ekspedicijo poslali 10 ljudi...in zagotovo je med temi 10 ljudmi tudi kakšen, ki ima več kot 1 potrebno veščino. Koliko najmanj ljudi moramo poslati na ekspedicijo?
Tudi ta problem lahko ponazorimo s pomočjo grafa. Imamo 2 tipa točk, ene, ki predstavljajo ljudi in ene, ki predstavljajo veščine. Povezave sedaj povezujejo človeka z veščinami, ki jih ima.
Želimo poiskati najmanjšo množico ljudi, ki ima (dominira) vse veščine.

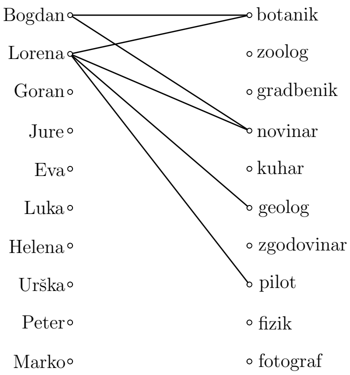
Primer

Bogdan ∘	∘ botanik
Lorena ∘	∘ zoolog
Goran ∘	∘ gradbenik
Jure ∘	∘ novinar
Eva ∘	∘ kuhar
Luka ∘	∘ geolog
Helena ∘	∘ zgodovinar
Urška ∘	∘ pilot
Peter ∘	∘ fizik
Marko ∘	∘ fotograf

Primer

Bogdan je botank in novinar.

Primer

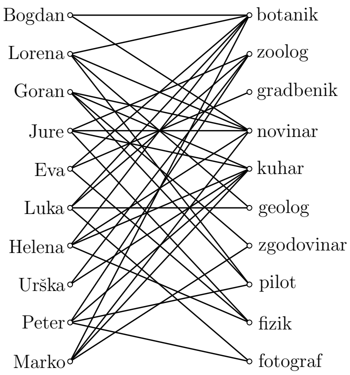


Bogdan je botank in novinar.Lorena je botanik, novinar, geolog in pilot.

Primer

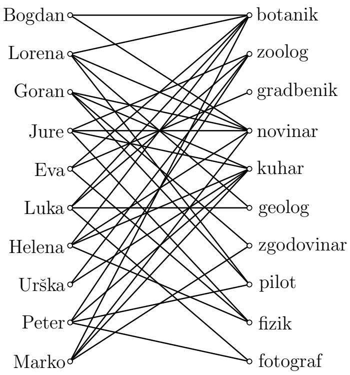
Bogdan je botank in novinar.Lorena je botanik, novinar, geolog in pilot.Goran je novinar, kuhar, zgodovinar in pilot.

Primer



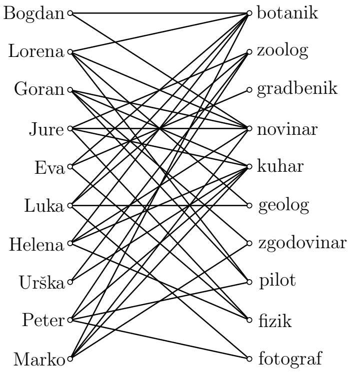
Bogdan je botank in novinar.Lorena je botanik, novinar, geolog in pilot.Goran je novinar, kuhar, zgodovinar in pilot.Jure je zoolog, novinar, kuhar in fizik. Eva je botanik, gradbenik, fizik. Luka je botanik, zoolog, geolog in fotograf. Helena je botanik, novinar, kuhar in fizik. Urška je zoolog in kuhar. Peter je zoolog, kuhar, pilot in fotograf. Marko je botanik, novinar, kuhar in zgodovinar.

Primer



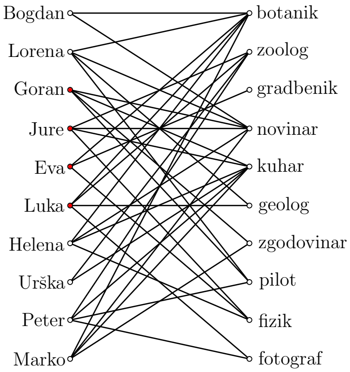
Bogdan je botank in novinar.Lorena je botanik, novinar, geolog in pilot.Goran je novinar, kuhar, zgodovinar in pilot.Jure je zoolog, novinar, kuhar in fizik. Eva je botanik, gradbenik, fizik. Luka je botanik, zoolog, geolog in fotograf. Helena je botanik, novinar, kuhar in fizik. Urška je zoolog in kuhar. Peter je zoolog, kuhar, pilot in fotograf. Marko je botanik, novinar, kuhar in zgodovinar.

Primer



V tem grafu želimo sedaj poiskati najmanjšo množico ljudi, ki ima (dominira) vse veščine.

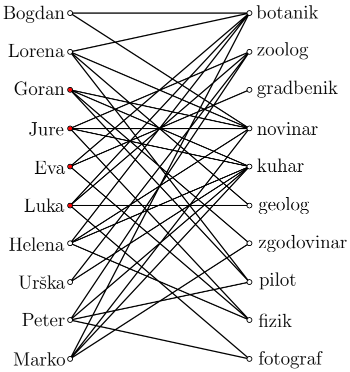
Primer



V tem grafu želimo sedaj poiskati najmanjšo množico ljudi, ki ima (dominira) vse veščine.

Možna rešitev: Goran, Jure, Eva, Luka.

Primer



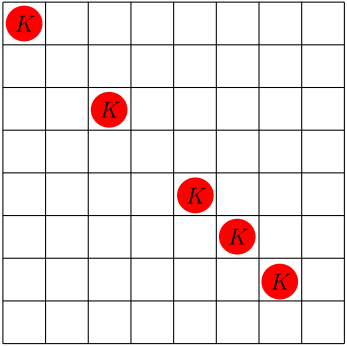
V tem grafu želimo sedaj poiskati najmanjšo množico ljudi, ki ima (dominira) vse veščine.

Možna rešitev: Goran, Jure, Eva, Luka.

Varianti dominacije za ta problem pravimo dvodelna dominacija.

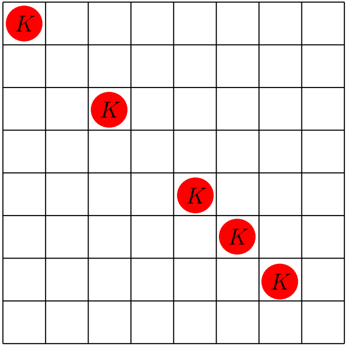
Nazaj h kraljicam

Nazaj h kraljicam



Bi lahko ta problem ponazorili z grafom?

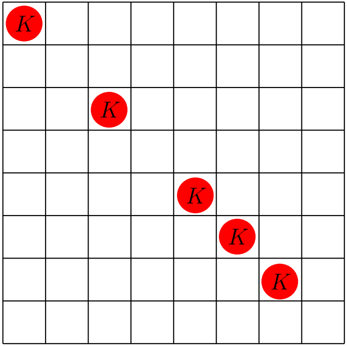
Nazaj h kraljicam



Bi lahko ta problem ponazorili z grafom?

Točka = polje na šahovnici

Nazaj h kraljicam

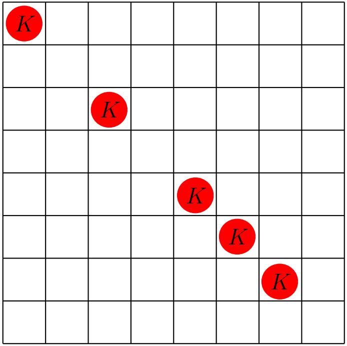


Bi lahko ta problem ponazorili z grafom?

Točka = polje na šahovnici

Povezave damo med tiste točke (polja), ki jih kraljica lahko doseže.

Nazaj h kraljicam



Bi lahko ta problem ponazorili z grafom?
Točka = polje na šahovnici
Povezave damo med tiste točke (polja), ki jih kraljica lahko doseže.
Opazimo, da podana rešitev predstavlja tako povezano dominantno množico kot tudi totalno dominantno množico.

Je to res tako enostavno?

Kako težko je pravzaprav najti minimalno dominantno množico poljubnega grafa?

Kako težko je pravzaprav najti minimalno dominantno množico poljubnega grafa?

Problem dominantne množice

Pri danem grafu G in naravnem številu k:

Kako težko je pravzaprav najti minimalno dominantno množico poljubnega grafa?

Problem dominantne množice

Pri danem grafu G in naravnem številu k:
Ali G vsebuje dominantno množico velikosti največ k?

Kako težko je pravzaprav najti minimalno dominantno množico poljubnega grafa?

Problem dominantne množice

Pri danem grafu G in naravnem številu k:
Ali G vsebuje dominantno množico velikosti največ k?

Izrek (Garey in Johnson, 1979)

DOMINANTNA MNOŽICA je NP-poln problem.

Kako težko je pravzaprav najti minimalno dominantno množico poljubnega grafa?

Problem dominantne množice

Pri danem grafu G in naravnem številu k:
Ali G vsebuje dominantno množico velikosti največ k?

Izrek (Garey in Johnson, 1979)

DOMINANTNA MNOŽICA je NP-poln problem.

Koliko minimalnih dominantnih množic lahko ima graf?

Kako težko je pravzaprav najti minimalno dominantno množico poljubnega grafa?

Problem dominantne množice

Pri danem grafu G in naravnem številu k:
Ali G vsebuje dominantno množico velikosti največ k?

Izrek (Garey in Johnson, 1979)

DOMINANTNA MNOŽICA je NP-poln problem.

Koliko minimalnih dominantnih množic lahko ima graf?
Fomin in soavtorji so pokazali, da ima graf na n točkah lahko med $1{,}5704^n$ in $1{,}7159^n$ minimalnih dominantnih množic.

Izrek (Ore, 1962)

Če za graf G velja $\delta(G) \geq 1$, potem je $\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$.

Izrek (Ore, 1962)

Če za graf G velja $\delta(G) \geq 1$, potem je $\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$.

Izrek (Reed, 1996)

Če je graf G povezan in velja $\delta(G) \geq 3$, potem je $\gamma(G) \leq \frac{3n}{8}$.

Izrek (Ore, 1962)

Če za graf G velja $\delta(G) \geq 1$, potem je $\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$.

Izrek (Reed, 1996)

Če je graf G povezan in velja $\delta(G) \geq 3$, potem je $\gamma(G) \leq \frac{3n}{8}$.

Izrek (Flach in Volkmann, 1990)

Za poljuben graf G velja $\gamma(G) \leq \left(n+1-(\delta(G)-1)\frac{\Delta(G)}{\delta(G)}\right)/2$.

Izrek (Weber, 1981)

Naj bo $k = \lfloor \log_2 n - 2\log_2 \log_2 n + \log_2 \log_2 e \rfloor$. Potem je za skoraj vsak graf $k+1 \leq \gamma(G) \leq k+2$.

Izrek (Weber, 1981)

Naj bo $k = \lfloor \log_2 n - 2\log_2 \log_2 n + \log_2 \log_2 e \rfloor$. Potem je za skoraj vsak graf $k+1 \leq \gamma(G) \leq k+2$.

Izrek (Berge, 1962)

Za poljuben graf G velja $\left\lceil \frac{n}{1+\Delta(G)} \right\rceil \leq \gamma(G) \leq n - \Delta(G)$.

Hvala za pozornost