Verjetnostni paradoksi

Mihael Perman

FAMNIT, Univerza na Primorskem

mihael.perman@upr.si

18. september, 2017

PREGLED

1. Uvodni razmisleki
   - Definicija besed
   - Kaj točno je verjetnost?
   - Prvi preprosti paradoksi
   - Vitez de Méré

Kaj pomeni beseda paradoks?

Iz slovarja slovenskega knjižnega jezika dobimo naslednjo definicijo"

> *paradóks -a m (ô) misel, trditev, ki temelji na neskladju s splošno veljavnim, priznanim: ni mogel razumeti paradoksa, da je človeku prekratek čas lahko tudi predolg; značilen dialektični paradoks; paradoks o združitvi nezdružljivega; najti razlago za paradoks • fiz. hidrostatični paradoks dejstvo, da tlak na steno posode ni odvisen od oblike posode, marveč od gostote tekočine in globine; lit. paradoks besedna figura, ki temelji na neskladju s spločno veljavnim, priznanim // ekspr. nasprotje, protislovje, navadno nesmiselno: zaiti v paradoks; gre samo za navidezen paradoks; znašel se je v nerešljivem paradoksu; to zveni kot paradoks.*

Iz Slovarja tujk dobimo:

> *It grščine paradokson = para dokein, kar pomeni izven nečesa, kar lahko verjamemo.*

Kaj je verjetnost, kaj pod tem razumejo matematiki?

- Intuitivno je verjetnost neka subjektivna ocena, do kakšne mere verjamemo, da se nek dogodek lahko zgodi.
- Za bolj matematično razumevanje rečemo, da je verjetnost delež primerov, ko se dogodek zgodi v "dolgem nizu" neodvisnih ponovitev istega poskusa.
- Bolj filozofski pojem verjetnosti vedno buri duhove.
- Za strogo matematično obravnavo rabimo bolj trdno definicijo.
- Večina paradoksov, ki nastopajo v verjetnosti, nastanejo zaradi nejasnih definicij ali nepopolnega opisa nekega poskusa.

Italijanski kockarji v 17. stoletju

Med italijanskimi kockarji v 17. stoletju je bila popularna igra, pri kateri je igralec plačal stavo, izbral število med 3 in 18, potem pa vrgel tri običajne igralne kocke. Če je bila vsota pik na treh kockah enaka izbranemu številu, je igralec stavo dobil in si je svoj denar podvojil, sicer pa je izgubil stavo. Posebej priljubljeni sta bili stavi na vsoto 9 in vsoto 10. Katera od obeh stav je boljša? Kockarji so menili, da sta stavi na 9 in 10 enakovredni, iz prakse pa so vedeli, da temu ni tako. Obrnili so se na svojega sodobnika Galileja (1564-1642), ki je našel preprosto rešitev.

“Rešitev” kockarjev samih

Kockarji so imeli svojo “teorijo” o stavah. Zapisali so trojice, ki dajo vsoto 9 oziroma 10 kot.

Vsota 9	Vsota 10
1 2 6	1 3 6
1 3 5	1 4 5
1 4 4	2 2 6
2 2 5	2 3 5
2 3 4	2 4 4
3 3 3	3 3 4

Iz spiska bi sklepali, da sta vsoti 9 in 10 enako verjetni, saj smo zapisali vse trojice. Kako je problem rešil Galilej?

Nauka Galilejeve rešitve

Galilejeva rešitev je preprosta, vendar vsebuje dva nauka, ki sta pomembna za moderno disciplino verjetnosti v matematiki.

1. Ko imamo opravka s poskusi z naključnimi izidi, moramo najprej navesti vse možne izide. Kaj so vse možnosti moramo skrbno razmisliti.
2. Ko enkrat navedemo vse izide in privzamemo, da so enako verjetni, moramo prav preštevati.

Vprašanje Viteza de Méréja

Plemič de Méré (1607-1684) je na svojega rojaka Blaisa Pascala naslovil naslednji vprašanji:

(i) Pošteno kocko vrežemo 4x. Zmagamo, če se vsaj enkrat pojavi šestica. Kolikšna je verjetnost, da zmagamo?

(ii) Dve pošteni kocki vržemo 24x. Zmagamo, če vsaj enkrat dobimo dvojno šestico. Kolikšna je verjetnost, da zmagamo?

De Méré je iz prakse vedel, da sta verjetnosti različni, kar se mu je zdelo protislovno, ker je verjetnost za eno šestico šestkrat večja kot za dvojno, metov ene kocke pa je šestkrat manj. Do rešitve zagate sta neodvisno eden od drugega prišla Blaise Pascal (1623-1662) in Pierre de Fermat (1607-1665) v izmenjavi pisem leta 1654.

Prvo vprašanje

Nauk Galilejevega primera je, da moramo najprej navesti vse možne izide štirih metov kock. Pri štirih metih ene kocke so to vsi nabori štirih števil med 1 in 6. Z računalniškim preštevanjem pridemo do zaključka, da je vseh naborov 1296, od tega je ugodnih izidov 671, torej je verjetnost za zmago enaka $p = 0.517747$. Kaj pa za drugo igro? Kaj so možni izidi? Z nekaj razmisleka pridemo do tega, da bi morali napisati vse nabore 24 parov števil med 1 in 6, recimo:

$$(1,1),(4,3),\ldots,(5,2)$$

Takih naborov je

$$22452257707354557240087211123792674816\,!!!$$

Preštevanje na roko odpade, odpove pa celo računalniško preštevanje.

Pascalova in Fermatova rešitev

Za rešitev je potreben osnovni izrek kombinatorike. V de Méréjevem prvem primeru je število vseh možnih izidov enako $6^4 = 1296$, v drugem pa $36^{24} = 22452257707354557240087211123792674816$. Manjka nam še število ugodnih izidov. Preprosta ideja obeh matematikov je bila, da raje preštejemo neugodne izide, s tem pa tudi ugodne. V prvem primeru so neugodni vsi nabori, ki ne vsebujejo 6, v drugem pa vsi nabori, ki ne vsebujenjo para $(6,6)$. V prvem primeru je takih $5^4 = 625$, v drugem pa 35^{24}. Tako dobimo verjetnost

$$p = \frac{6^4 - 5^4}{6^4} \doteq 0.517747$$

v prvem primeru in verjetnost

$$p = \frac{36^{24} - 35^{24}}{36^{24}} \doteq 0.491404\,.$$

S tem protislovnost izgine.

Nauk Pascalove in Fermatove rešitve

Če želimo prave izračune verjetnosti, moramo znati prav preštevati. Preštevanja so obsežen del moderne kombinatorike, ki postreže z metodami preštevanja. Te metode so še vedno predmet matematičnega raziskovanja.

Bertrandov paradoks

Joseph Bertrand (1822-1900) je postavil naslednjo nalogo: v treh škatlah imamo po dva kovanca. V prvi dva zlata, v drugi zlat in srebrn in v tretji dva srebrna. Naključno izberemo škatlo, tako da ima vsaka verjetnost $1/3$, da bo izbrana. V drugem koraku naključno izberemo kovanec, tako da ima vsak kovanec verjetnost $1/2$, da bo izbran. Recimo, da smo na drugem koraku izbrali zlat kovanec. Kolikšna je verjetnost, da je tudi drug kovanec v izbrani škatli zlat? Kot odgovor se ponuja $1/2$ ...., vendar .... poglejmo najprej simulacijo.

Rešitev Bertrandovega paradoksa

Galilej nas uči, da moramo zapisati vse možne izide. Eksperiment ima dve stopnji in obe moramo vključiti na spisek (množico) vseh izidov. Škatle lahko oštevilčimo z 1, 2 in 3, zlatemu kovancu dodelimo število 1, srebrnemu pa 0. Tako lahko predlagamo kot spisek

$$(1,1a),(1,1b),(2,0),(2,1),(3,0),(3,1)\,.$$

Pri tem prvo število razumemo kot izbiro škatle, drugo pa kot izbiro kovanca, pri čemer 1a in 1b razumemo kot prvi ali drugo zlat kovanec. Iz besedila izhaja, da vsakemu možnemu izidu dodelimo enako verjetnost $1/6$. Kaj pomeni to, da sprašujemo po drugem kovancu, pa vemo da je izbran kovanec zlat?

V Bertrandovem paradoksu se srečamo s tem, da imam poskus z naključnim izidom in dodatno informacijo o izidu. Kaj to pomeni matematično? Ko rečemo, da je izbran kovanec zlat, smo spisek izidov, ki še pridejo v poštev, skrčili na

$$(1, 1a), (1, 1b), (2, 1)\,.$$

Logično je pričakovati, da bodo pri pogoju, da je bil izbran kovanec zlat, vsi preostali možni izidi enako verjetni. Drug kovanec bo zlat v dveh od treh primerov, kar se ujema s simulacijami. V matematičnem jeziku rečemo, da smo določili pogojno verjetnost.

Jetniški paradoks

Trije jetniki, A, B in C, so v neki mračni deželi obsojeni na smrt. Na državni praznik bo samodržec naključno izbral enega izmed njih in ga pomilostil. Jetnik A se v kehi pogovarja s stražarjem, za katerega privzememo, da že pozna samodržčevo izbiro:

A: Stražar, veva da eden od ostalih jetnikov ne bo pomiloščen. Če mi poveš kateri, mi s tem ne daš nobene nove informacije. Moja verjetnost preživetja je še vedno $1/3$.

S: Če ti povem, kdo od ostalih dveh ne bo pomiloščen, ostaneta samo dva, tako da tvoja verjetnost preživetja narase na $1/2$. S tem ti dam nekaj informacije o tem, kakšne so tvoje možnosti preživetja.

Kdo od dveh ima prav, jetnik A ali stražar?

Prevedba na standardno verjetnost

Besedilo domnevnega paradoksa govori o "dodatni informaciji", kar v verjetnosti razumemo kot pogojne verjetnosti. Ker dodatno informacijo razumemo kot zožitev množice vseh možnih izidov, moramo najprej formulirati množico vseh možnih izidov, ki bo vsebovala tudi stražarjeve izjave. Ena možnost je

A B	B		A C	C		B C	B		B C	C

Prvi dve črki pomenita kdo bo usmrčen, zadnja pa, koga bo navedel stražar. Prva dva izida imata verjetnost $1/3$, in zadnja dva skupaj $1/3$. Iz besedila naloge se ne da razbrati, kako je zadnja $1/3$ razdeljena med zadnja dva izida!

Rešitev jetniškega paradoksa

Označimo $A = \{\text{A preživi}\}$ in $B = \{\text{stražar reše B}\}$. Verjetnost $1/3$ razdelimo zadnjima dvema izidoma v razmerju $x : 1 - x$ za nek $x \in [0, 1]$, tako da sta verjetnosti $x/3$ in $(1 - x)/3$. Po običajnih formulah je

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{x/3}{1/3 + x/3} = \frac{x}{1 + x} .$$

V odvisnosti od x dobimo drugačne odgovore. Če je $x = 1/2$ ima prav jetnik A. Pogojna verjetnost je enaka brezpogojni. Če je $x = 1$, ima prav stražar. V ostalih primerih nima prav ne en ne drug.

Monty Hallov paradoks

V televizijski oddaji tekmovalca postavijo pred tri zaprta vrata. Za enimi vrati je nagrada, za drugimi ni nič, za tretjimi pa koza, vendar tekmovalec ne ve vrstnega reda. Kot matematiki se že moramo vprašati, kako je izbran vrstni red, vendar bomo privzeli, da je vseh šest možnih vrstnih redov enako verjetnih. Ko tekmovalec izbere vrata, mu voditelj oddaje odpre ali prazna vrata ali pa vrata s kozo. Tekmovalec se lahko odloči, da ostane pri svoji začetni izbiri ali pa si izbere druga vrata, ki jih ni izbral na začetku in so še zaprta. Glede na to, da je ostal z dvema izbirama, je na videz vseeno kaj se igralec odloči, ker je verjetnost za nagrado $1/2$, vendar .... Oglejmo si primer, ko se bo igralec vedno odločil, da preklopi na tretja vrata.

Kaj je strategija?

Eden od razlogov za navidezni paradoks je nejasnost pojma strategije. V preprostem jeziku je strategija natančen predpis, kako se bo igralec odločal. O verjetnostih lahko govorimo, ko imamo natančen opis strategije in se je potem tudi dosledno držimo. Primera strategije sta:

(i) Izberemo vrata. Ko nam voditelj odpre prazna vrata ali vrata s kozo, se odločimo, da preklopimo.

(ii) Izberemo vrata. Ko nam voditelj odpre prazna vrata ali vrata s kozo, vržemo pošten kovance. Če pade grb, preklopimo, če pade številka, pa ne.

Ko smo jasno povedali, kaj je “strategija”, se lahko lotimo računanja verjetnosti.

Verjetnost nagrade pri prvi strategiji

V tem primeru je odgovor preprost: če najprej izberemo vrata z nagrado, bomo vrata zamenjali in nagrade ne bomo dobili. Če pa izberemo vrata brez nagrade, bo voditelj odprl edina preostala vrata brez nagrade. Ko preklopimo, je edina možnost, da preklopimo na vrata z nagrado. V matematičnem jeziku lahko rečemo, da dobimo nagrado, če in samo če na začetku izberemo vrata brez nagrade. Po naših predpostavkah je ta verjetnost $2/3$.

Verjetnost nagrade pri drugi strategiji

Tukaj nam bo pomagal Galilej. Napišimo vse kar se lahko zgodi. Opravka imamo s pari

$$(N, H), (N, T), (K, H), (K, T), (P, H), (P, T)$$

z očitnimi oznakami. Po predpostavkah imajo vsi moži izidi verjetnost $1/6$. Če dosledno sledimo predpisani strategiji, do nagrade vodijo izidi

$$(N, T), (K, H), (P, H)\,,$$

tako da je verjetnost za nagrado v tem primeru enaka $1/2$. Omenimo še, da pri strategiji, ko nikoli ne preklopimo, nagrado dobimo z verjetnostjo $1/3$.

Nauk Monty Hallovega paradoksa

V resnici ne gre za paradoks, tamveč za nejasnost glede postopka odločanja. Monty Hallov paradoks lahko dodatno zaplete to, da poskusimo vključiti to, kako se bo odločal voditelj, vendar je to posebej zgodba, v drugi preobleki znana kot Jetniški paradoks.

Martingalska strategija pri ruleti

Evropska ruleta ima 37 možnih izidov, 18 rdečih, 18 črnih in 1 zelenega. Različih stav je precej, ogledeli pa si bomo samo stavo na rdeče. Predpostavimo, da stavimo 1€. Če je končna številka rdeča, nam hiša vrne stavo 1€ in doda še 1€, sicer pa stavo zgubimo. Če stavimo večje vsote je podobno. V primeru zmage nam vrnejo stavo in dodajo še enkrat toliko. Verjetnost, da stavo dobimo, je ob privzetku, da so vse številke enakovredne, enaka 18/37.

Že več stoletij je znana martingalska strategija: ko začnemo igrati, stavimo 1€. Če dobimo, poberemo izplačilo, če zgubimo, pa stavimo 2€. Če zmagamo, poberemo izplačilo, sicer stavimo 2€,... Stavo podvajamo, dokler nekoč v prihodnosti ne dobimo rdeče številke, kar se bo prej ali slej zgodilo.

Navidezna privlačnost martingalske strategije

Recimo, da se je rdeča številka pojavila v 6 igri rulete. Celotne stave so tako bile

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31\,,$$

celotno izplačilo pa je

$$2 \cdot 2^4 = 32\,.$$

Po 6 igrah smo tako 1€ na boljšem. Enak razmislek velja splošno. Če se rdeča številka pojavi v n-ti igri, smo vplačali

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1\,,$$

celotno izplačilo pa je

$$2 \cdot 2^{n-1} = 2^n\,.$$

Tudi v splošnem smo 1€ na boljšem. Imamo torej strategijo, kjer pridelamo 1€ z verjetnostjo 1!

Je zgornje res paradoks? Kaj pravi matematika?

Matematična teorija pravi, da v primeru, ko so vsi izidi enako verjetni in so zaporedni izidi med sabo neodvisni, ne obstaja strategija, s katero bi v povprečju lahko nekaj pridobili. To je v očitnem nasprotju z martingalsko strategijo.

Kaj pravi izkušnja?

Giacomo Girolamo Casanova (1725-1795) v svoji *Histoire de ma vie*, poglavje 7, spomini na obisk Benetk leta 1754, pravi:

> *Igral sem martingal podvajajoč stave in dobival vse preostale dni karnevala. Imel sem srečo, da nikoli nisem izgubil šeste karte, kar bi pomenilo, da bi ostal brez denarja, saj sem na karto stavil 2000 cekinov. Z zadovoljstvom sem ugotavljal, da sem povečal premoženje svoje ljubice.*

Vendar nekaj dni pozneje:

> *Še vedno sem igral martingal, vendar me je sreča zapustila in sem ostal brez ficka. Ker sem si premoženje delil z ljubico, sem ji moral povedati o zaigranem denarju. Na njeno željo sem prodal njene diamante - in denar spet izgubil. Revica je ostala samo s 500 cekini. Nič več ni bilo govora, da bi z mano pobegnila iz samostana, saj ne bi imela od česa živeti.*

Kako ocenjujemo startegijo?

Kaj je mera uspešnosti neke strategije igranja pri ruleti? Spet moramo biti natančni pri tem, čemu rečemo strategija. Strategije lahko imajo omejeno število iger, fiksno ali slučajno število iger, uspešnost pa merimo navadno s povprečjem zaslužka na koncu, ki je po matematični teoriji negativen. Sklep na koncu bo, da martingalska strategije ne deluje, ker v igralnico vstopimo z končno količino denarja.
Ogledali si bomo dva primera:

- Igrali bomo martingalsko strategijo dokler ali ne izgubimo vsega denarja ali smo odigrali N iger, kjer igrati prenehamo.
- Igrali bomo martingalsko strategijo, dokler gre.

Rezultati računalniškega igranja bodo razblinili paradoks.

Še en Bertrandov paradoks

Zamislimo si naslednjo nalogo: na krožnici naključno izberemo tetivo in jo vzamemo kot osnovnico enakostraničnega trikotnika. Kolikšna je verjetnost, da bo ta trikotnik vsebovan znotraj krožnice.
Je to dobro formuliran problem ali lahko pripelje spet do kakšnega paradoksa? Ali dobro razumemo, kaj pomeni naključno izbrati tetivo?

Tri možnosti izbire

Imamo več možnosti, kako izbrati slučajno tetivo, ki so vse “naravne”:

(i) Izberemo naključno točko v notranjosti kroga in jo vzamemo za središče tetive.

(ii) Na polmeru (kateremkoli zaradi simetrije) si izberemo naključno točko, ki jo vzamemo za središče tetive.

(iii) Na krožnici si izberemo neodvisno naključni točki, ki sta krajišči tetive.

Odgovori na tri možnosti

Odgovori na zastavljeno vprašanje so po vrsti:

(i) Hitro vidimo, da bo trikotnik ne bo vsebovan v krogu, če bo izbrana naključna točka v krogu s polmerom $r = 1/2$. Ker na tiho predpostavljamo, da je verjetnost izbire soraymerna ploščini, je odgovor $1/4$, torej bo trikotnik vsebovan v krogu z verjetnostjo $3/4$.

(ii) V tem primeru mora biti izbrana točka na polmeru dlje kot $1/2$ od središča. Ker na tiho predpostavljamo, da je verjetnost sorazmerna dolžini, je ta verjetnost $1/2$.

(iii) Zaradi simetrije si lahko mislimo, da je ena točka fiksna. Iz slike je potem jasno, da bo trikotnik vsebovan v krogu, če bo izbrana točka v dveh od treh lokov, na katere krožnico razdeli včtran enakostraničen trikotnik z vrhom v fiksni točki. Ker na tiho prepostavljamo, da je verjetnost izbire sorazmerna z dolžino loka, dobimo odgovor $2/3$.

Kje je paradoks? Imamo tri različne odgovore na isto vprašanje. Vendar je razlaga enostavno v tem, da "slučajna tetiva" ni nedvoumno definiran pojem.