Matematika in finančna pismenost

Mihael Perman

FAMNIT, Univerza na Primorskem

mihael.perman@upr.si

19. oktober, 2016

PREGLED

Elementi finančne pismenosti

- Finančna pismenost je razumevanje delovanja denarja.
- Razumevanje in zmožnost primerjave cen in razumevanje računov.
- Zmožnost predvidevanja dohodkov in stroškov.
- Zmožnost pravilnih dolgoročnih odločitev.
- Zmožnost razumevanja finančnih pogodb.

Slovenija

- Sistematskega opismenjevanja praktično ni.
- V OECD študiji finančne pismenosti Slovenija podpovprečna.
- Zakonodaja lahko zahteva ustrezna razkritja in omejitve stroškov.
- Zakonodaja ne more preprečiti kupovanja napačnih produktov.

Izsek iz OECD študije o finančni pismenosti

■ Table VI.A ■

SNAPSHOT OF PERFORMANCE IN FINANCIAL LITERACY

Countries/economies with mean score/share of top performers/relative performance **above** the OECD average-13 Countries/economies with share of lowest performers **below** the OECD average-13
Countries/economies with mean score/share of top performers/share of lowest performers/relative performance not statistically different from the OECD average-13
Countries/economies with mean score/share of top performers/relative performance **below** the OECD average-13 Countries/economies with a share of lowest performers **above** the OECD average-13

	Performance in financial literacy				Relative performance in financial literacy, compared with students around the world with similar performance in mathematics and reading
	Mean score in PISA 2012	Share of lowest performers (Level 1 or below)	Share of top performers in financial literacy (Level 5 or above)	Gender difference (Boys - Girls)	
	Mean score	%	%	Score dif.	Score dif.
OECD average-13	500	15.3	9.7	1	2
Shanghai-China	603	1.6	42.6	-1	0
Flemish Community (Belgium)	541	8.7	19.7	11	9
Estonia	529	5.3	11.3	-3	5
Australia	526	10.4	15.9	-3	18
New Zealand	520	16.1	19.3	3	12
Czech Republic	513	10.1	9.9	6	19
Poland	510	9.8	7.2	3	2
Latvia	501	9.7	4.6	-11	1
United States	492	17.8	9.4	1	1
Russian Federation	486	16.7	4.3	1	14
France	486	19.4	8.1	-6	-24
Slovenia	485	17.6	5.8	-8	-8
Spain	484	16.5	3.8	6	4
Croatia	480	16.5	3.8	5	2
Israel	476	23.0	8.5	-6	-5
Slovak Republic	470	22.8	5.7	-3	2
Italy	466	21.7	2.1	**8**	-14
Colombia	379	56.5	0.7	0	-5

Note: Countries/economies in which the performance difference between boys and girls is statistically significant are marked in **bold**.
Countries and economies are ranked in descending order of the mean score in financial literacy in PISA 2012.
Source: OECD, PISA 2012 Database, Tables VI.2.1, VI.2.2, VI.2.3 and VI.3.1.

Osnovna ideja obrestovanja

Osrednja ideja finančnega sveta je obrestna mera. Predpostavljamo, da se denar na bančnem računu "množi" z letno obrestno mero r. Po enem letu tako količina denarja narase.

$$x \to (1 + r) \cdot x \,.$$

Kaj pa, če moramo plačati x enot čez eno leto?

$$(1 + r)^{-1} \cdot x \to x \,.$$

Izraz na levi je tisto kar rabimo za izpolnitev obveznosti čez eno leto.

Drugačna časovna obdobja

Teoretično lahko denar dvignemo vsak n-ti del leta in ga takoj vrnemo na račun. Če je r' obrestna mera za n-ti del leta, se v letu mora zgoditi

$$x \to (1 + r')^n \cdot x \,.$$

Ker mora to dati enak rezultat, velja

$$(1 + r')^n = 1 + r \qquad \text{ali} \qquad 1 + r' = (1 + r)^{\frac{1}{n}} \,.$$

Če denar dvignemo po m od n delov leta, bi to z obrestmi moralo nanesti

$$x \to (1 + r)^{\frac{m}{n}} \cdot x \,.$$

Če vzamemo leto za enoto časa za racionalne $t = m/n$ velja

$$x \to (1 + r)^t \cdot x \,.$$

Za poljuben t dobimo splošno potenco.

Obrat ideje

Če se postavimo v vlogo prejemnika plačila x čez eno leto, nam je to v tem trenutku vredno manj, torej

$$(1+r)^{-1} \cdot x\,,$$

ker mora toliko dati na stran plačnik. Plačilo x čez t enot časa pa je v tem trenutku vredno

$$(1+r)^{-t} \cdot x\,.$$

Ta operaciji se reče diskontiranje. Zneski $x_1, x_2, \ldots, x_N$, ki bodo prejeti v trenutkih $t_1, t_2, \ldots, t_n$, imajo v tem trenutku vrednost

$$PV = \sum_{k=1}^{N} \frac{x_k}{(1+r)^{t_k}}\,.$$

Ta količina je sedanja vrednost (angl. present value=PV) prihodnih denarnih tokov.

Določanje obrestne mere

Kdo določi letno obrestno mero za diskontiranje?

- Večinoma obrestno mero določajo finančni trgi.
- Vlogo imajo tudi zakonodajalci in centralne banke.
- V zavarovalništvu je obrestna mera pogosto predpisana ali je predpisan način izračuna.

Izračun obroka kredita

Recimo, da vzamete kredit v višini K pri obrestni meri r, ki jo banka interno uporablja za diskontiranje. Privzemimo, da bo r konstantna, kredit pa boste odplačevali mesečno naslednjih N mesecev.

- Kako banka določi mesečni obrok? Če obrok označimo z x, mora biti sedanja vrednost izplačil enaka višini kredita, torej

$$K = PV = \sum_{k=1}^{N} \frac{x}{(1+r)^{\frac{k}{12}}}\,.$$

  To je linearna enačba za x.

Potek kredita

Stanje dolga v vmesnih trenutkih izračunamo s pomočjo sedanje vrednosti. Po n-tem plačilu obroka je sedanja vrednost dolga enaka

$$PV_n = K - \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{(1+r)^k} ,$$

dejanska pa

$$G_n = (1+r)^n \left(K - \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{(1+r)^k} \right) .$$

S tem lahko tudi določimo, kolikšen del n-tega plačila so bile obresti. Upad glavnice je $G_{n-1} - G_n$ ($G_0 = K$), torej znašajo obresti

$$I_n = x - (G_{n-1} - G_n) .$$

Efektivna obrestna mera

- Vzemimo primer kredita v višini $K = 100.000$ eurov z obrestno mero $r = 0.035$ za obdobje 15 let. Obrok kredita je $x = 712.19$.
- Vendar so še stroški odobritve v višini $S = 80$ eurov in zavarovanje kredita s premijo $P = 0.015 \cdot N \cdot x$ eurov. Kaj je v resnici obrestna mera?
- V enačbi za izračun obroka na levi zamenjamo K z $K - S - P$ in dobimo enačbo

$$K - S - P = \sum_{k=1}^{180} \frac{x}{(1+r)^{k/12}} .$$

Desna stran monotono pada z r proti 0, zato ima enačba enolično rešitev. Ta rešitev je **efektivna obrestna mera**. V zgornjem primeru je $r = 0.038$.

Zaključne pripombe

- Večina kreditov nima fiksne obrestne mere, temveč je ta vezana na EURIBOR na tak način, da EURIBORU prištejemo pribitek.
- To pomeni to, da se način diskontiranja spreminja, še vedno pa je osnovna ideja.
- Banka za svoje interno diskontiranje uporablja manjšo obrestno mero. Zakaj? Eno je zaslužek, banka pa mora tudi pokrivati tveganje neplačnikov.

Zadolževanje Republike Slovenije, primer obveznice RS77

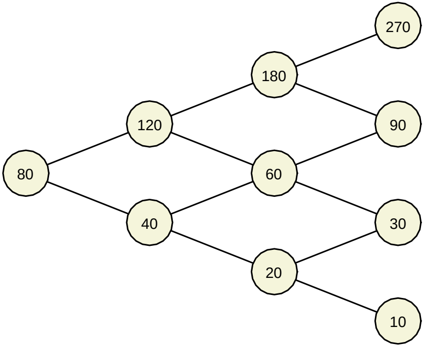
- Načrt odplačevanja RS77 je na spletni strani Ministrstva za finance RS.
- V načelu so investitorji pripravljeni plačati sedanjo vrednost kuponov in glavnice.
- Obrestno mero za 16 letne obveznice RS lahko 19. 10. 2016 preberemo na Bloombergu.
- Koliko bi iztržili za denarni tok iz naslova obveznice danes?

Kaj pa obveznice v dolarjih?

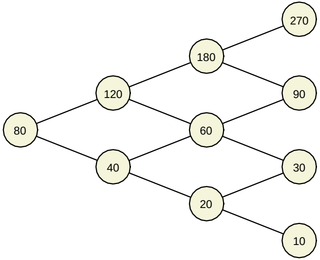
Če vzamemo kredit v tuji valuti (recimo v CHF) smo izpostavljeni valutnemu tveganju. Slovenija se je 2012 in 2013 močno zadolžila v dolarjih. Na sliki je cena US$ v eurih od 2012 do danes. Kaj pa zdaj?

Preprost primer

Recimo, da se strinjamo, da so možni poteki cene neke delnice kot na spodnji sliki. Lahko sklenem pogodbo, da bom od vas na koncu **lahko** kupil delnico po ceni 80. V tehničnem jeziku govorimo o evropski nakupni opciji z izvršilno ceno 80. Koliko pa je vredna pravica nakupa delnice po vnaprej določeni ceni?



Varovanje in arbitraža 1

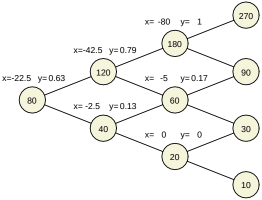


V vozlišču 180 lahko sestavimo premoženje iz x enot denarja in y enot delnice. Na koncu bo pravica vredna ali 190 ali 10. Če izberemo x in y tako, da bo

$$\begin{aligned} x &+ 270 \cdot y &= 190 \\ x &+ 90 \cdot y &= 10 \end{aligned}$$

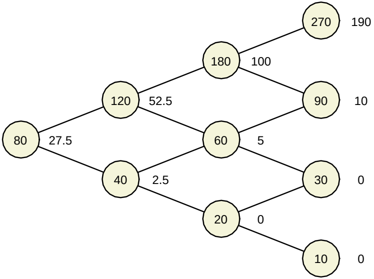
bo to premoženje na koncu vredno točno enako kot pravica nakupa.

Varovanje in arbitraža 2



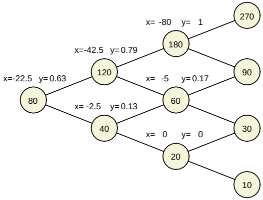
Sistem linearnih enačb lahko rešimo v vsakem od vozlišč na predzadnjem koraku. Ker bo premoženje iz x in y na koncu vredno enako kot opcija, mora biti enako vredno zdaj. Temu se reče načelo odsotnosti **arbitraže**.

Varovanje in arbitraža 3



Vozlišča lahko rekurzivno zapolnimo s vrednostmi opcije. Vsakič sestavimo tudi **varovanje** iz x in y, ki se dinamično spreminja. S tem "pridelamo" tudi ceno na začetku.

Varovanje in arbitraža 4



Opazimo, da se od prvega koraka premoženje samo preliva iz ene oblike v drugo. Ko prispemo v vozlišče, prejšnji par (x, y) spremenimo v novega tako, da spremembo v x investiramo v delnice. Rečemo, da je varovanje **samo-financirajoče**. To osmisli začetno ceno.

Kako pa je z menjalnimi tečaji?

Podobno je z menjalnimi tečaji. Sklenemo lahko pogodbe, ki nam v naprej določenem trenutku v prihodnosti omogočajo nakup tuje valute pa vnaprej določeni ceni. Varovanje je bolj zapleteno, ideja pa je enaka.

Osnovni pojmi

- Zavarovanje je danes institucionalizirana solidarnost med zavarovanci.
- Z zavarovalno pogodbo se zaščitimo pred morebitnimi večjimi škodami.
- Škodo lahko povzročimo drugim mi ali jo nam povzročijo drugi ali narava.
- Zavarovalna pogodba mora biti sklenjena izključno za prihodnost za nepredvidljive dogodke.
- Za kritje tveganja moramo plačati premijo.
- Zavarovalnice morajo s premijami skrbno ravnati in ustrezno upravljati s tveganji.

Določanje premije

- Premijo zavarovalnice določijo na podlagi podatkov in izkušenj.
- V načelu je premija povprečna škoda na zavarovanca.
- Zaradi nepredvidljivosti mora imeti zavarovalnica nekaj svojega kapitala.
- Razmišljanje je nujno stohastično.

Primer razmisleka o premijah

- Recimo, da prodamo $N = 10.000$ polic avtomobilskega zavarovanja.
- Predpostavljamo, da je verjetnost, da bo lastnik police povzročil škodo $p = 0,0331$.
- Predpostavljamo, da so dogodki, da lastnik police povzroči škodo, neodvisni.
- Predpostavimo, da je povprečna škoda $m = 2000$ z raztrosom $s = 4000$.

Kako razmišljamo o premiji?

Zakonski okvir

- Regulativa zahteva, da je zavarovalnica z verjetnostjo 0.995 sposobna pokriti škode.
- 203. člen v Zakonu o zavarovalništvu-1.
- Zgornji primer je poenostavljen, pa vendar so rezultati blizu tržnim.
- Kdo poskrbi, da zavarovalnice ne napenjajo cen?
- Zavarovalnice z veliko “sala” si lahko privoščijo prodajo po nižjih cenah.