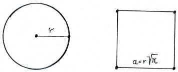
Trije klasični starogrški problemi

Aleksander Malnič
Univerza v Ljubljani in Univerza na Primorskem

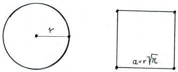
Izleti v matematično vesolje

UP FAMNIT, oktober 2020

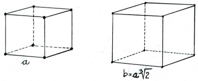
- **Kvadratura kroga**. Konstruirati kvadrat ki je ploščinsko enak danemu krogu s polmerom r: konstruirati stranico kvadrata z dolžino $a = r\sqrt{\pi}$.



- **Kvadratura kroga**. Konstruirati kvadrat ki je ploščinsko enak danemu krogu s polmerom r: konstruirati stranico kvadrata z dolžino $a = r\sqrt{\pi}$.

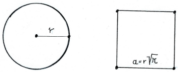


- **Podvojitev kocke**. Za dano kocko z robom a konstruirati kocko z dvakrat večjo prostornino: konstruirati daljico z dolžino $b = a\sqrt[3]{2}$.

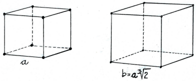


Trije klasični starogrški problemi, -5. stol.

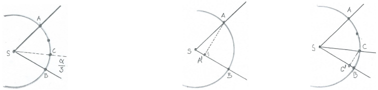
• **Kvadratura kroga**. Konstruirati kvadrat ki je ploščinsko enak danemu krogu s polmerom r: konstruirati stranico kvadrata z dolžino $a = r\sqrt{\pi}$.



• **Podvojitev kocke**. Za dano kocko z robom a konstruirati kocko z dvakrat večjo prostornino: konstruirati daljico z dolžino $b = a\sqrt[3]{2}$.

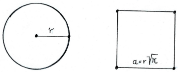


• **Tretinjenje kota**. Za dani kot α konstruirati kot $\alpha/3$: konstruirati daljico z dolžino $\cos\alpha/3$, če je dana daljica z dolžino $\cos\alpha$.

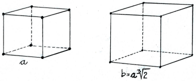


Trije klasični starogrški problemi, -5. stol.

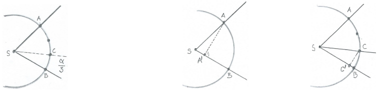
• **Kvadratura kroga**. Konstruirati kvadrat ki je ploščinsko enak danemu krogu s polmerom r: konstruirati stranico kvadrata z dolžino $a = r\sqrt{\pi}$.



• **Podvojitev kocke**. Za dano kocko z robom a konstruirati kocko z dvakrat večjo prostornino: konstruirati daljico z dolžino $b = a\sqrt[3]{2}$.



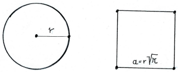
• **Tretinjenje kota**. Za dani kot α konstruirati kot $\alpha/3$: konstruirati daljico z dolžino $\cos \alpha/3$, če je dana daljica z dolžino $\cos \alpha$.



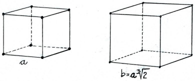
• Uporaba neoznačenega ravnila ter šestila, ki se pri odmiku sklopi. Zato ni mogoče meriti ali s šestilom prenašati razdalj.

Trije klasični starogrški problemi, -5. stol.

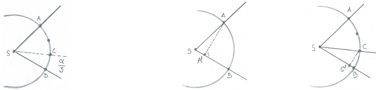
• **Kvadratura kroga**. Konstruirati kvadrat ki je ploščinsko enak danemu krogu s polmerom r: konstruirati stranico kvadrata z dolžino $a = r\sqrt{\pi}$.



• **Podvojitev kocke**. Za dano kocko z robom a konstruirati kocko z dvakrat večjo prostornino: konstruirati daljico z dolžino $b = a\sqrt[3]{2}$.



• **Tretinjenje kota**. Za dani kot α konstruirati kot $\alpha/3$: konstruirati daljico z dolžino $\cos\alpha/3$, če je dana daljica z dolžino $\cos\alpha$.



• Uporaba neoznačenega ravnila ter šestila, ki se pri odmiku sklopi. Zato ni mogoče meriti ali s šestilom prenašati razdalj. **Trije klasični problemi so konstrukcijski nerešljivi**. Dokaz šele v 19. stol. (algebra, analiza).

Stari Grki: Geometrizacija aritmetike in algebre

1. Matematika razvije v neolitiku kot **uporabna veščina** zaradi potreb trgovine in državne birokracije (-3000, -2000: Mezopotamija, Egipt).

Stari Grki: Geometrizacija aritmetike in algebre

1. Matematika razvije v neolitiku kot **uporabna veščina** zaradi potreb trgovine in državne birokracije (-3000, -2000: Mezopotamija, Egipt).
2. -800 Grška kultura dodobra formirana. V nasprotju s starejšimi kulturami Grki vpeljejo **racionalizem**: temelji na **logični dedukciji**.

1. Matematika razvije v neolitiku kot **uporabna veščina** zaradi potreb trgovine in državne birokracije (-3000, -2000: Mezopotamija, Egipt).
2. -800 Grška kultura dodobra formirana. V nasprotju s starejšimi kulturami Grki vpeljejo **racionalizem**: temelji na **logični dedukciji**.
3. V matematiki gre za **aksiomatski pristop**. Iz osnovnih aksiomov, ki jih privzamemo kot resnične, z logičnim sklepanjem izpeljemo manj očitne, bolj kompleksne trditve.

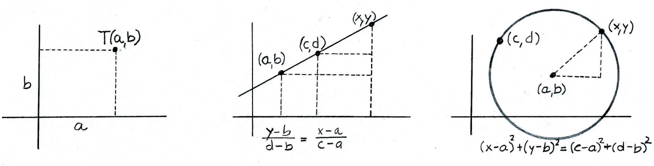
Stari Grki: Geometrizacija aritmetike in algebre

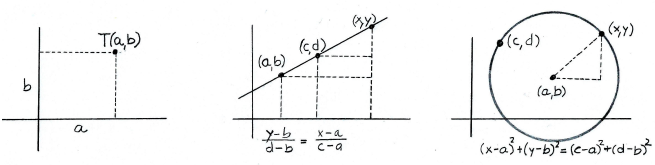
1. Matematika razvije v neolitiku kot **uporabna veščina** zaradi potreb trgovine in državne birokracije (-3000, -2000: Mezopotamija, Egipt).
2. -800 Grška kultura dodobra formirana. V nasprotju s starejšimi kulturami Grki vpeljejo **racionalizem**: temelji na **logični dedukciji**.
3. V matematiki gre za **aksiomatski pristop**. Iz osnovnih aksiomov, ki jih privzamemo kot resnične, z logičnim sklepanjem izpeljemo manj očitne, bolj kompleksne trditve.
4. Zaradi vizualizacije je aksiomatiko najlažje izpeljati v geometriji. **Geometrizacija aritmetike in algebre**. Število = dolžina daljice.

Stari Grki: Geometrizacija aritmetike in algebre

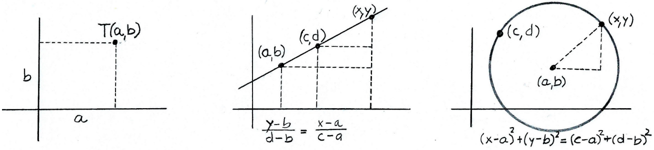
1. Matematika razvije v neolitiku kot **uporabna veščina** zaradi potreb trgovine in državne birokracije (-3000, -2000: Mezopotamija, Egipt).
2. -800 Grška kultura dodobra formirana. V nasprotju s starejšimi kulturami Grki vpeljejo **racionalizem**: temelji na **logični dedukciji**.
3. V matematiki gre za **aksiomatski pristop**. Iz osnovnih aksiomov, ki jih privzamemo kot resnične, z logičnim sklepanjem izpeljemo manj očitne, bolj kompleksne trditve.
4. Zaradi vizualizacije je aksiomatiko najlažje izpeljati v geometriji. **Geometrizacija aritmetike in algebre**. Število = dolžina daljice.
5. Za rešitev treh klasičnih problemov je potreben obrat: algebraizirati geometrijo. Prva polovica 17. stol.

Algebraizacija geometrije – koordinatizacija ravnine



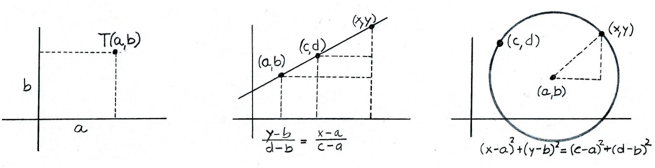


- **Krivulja** $\leftrightarrow$ **Enačba**. René Descartes (1637), Pierre de Fermat (1636).

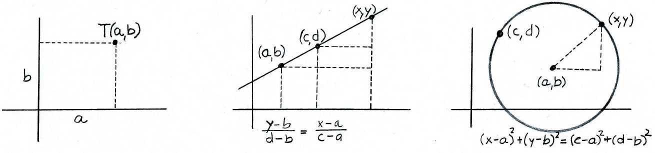


• **Krivulja** ↔ **Enačba**. René Descartes (1637), Pierre de Fermat (1636). Koordinate že davno prej: Apolonij iz Perge (-3. stol), Eratosten iz Kirene (-3. stol), na sferi: vzporedniki in poldnevniki. Nicholas Oresme (14. stol): poskus matematizacije fizike – grafični dokaz izreka o povprečni hitrosti.

Algebraizacija geometrije – koordinatizacija ravnine

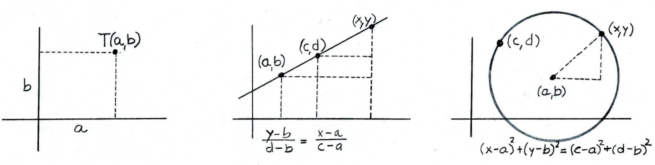


- **Krivulja** $\leftrightarrow$ **Enačba**. René Descartes (1637), Pierre de Fermat (1636). Koordinate že davno prej: Apolonij iz Perge (-3. stol), Eratosten iz Kirene (-3. stol), na sferi: vzporedniki in poldnevniki. Nicholas Oresme (14. stol): poskus matematizacije fizike – grafični dokaz izreka o povprečni hitrosti.
- **Simbolizacija in notacija**.



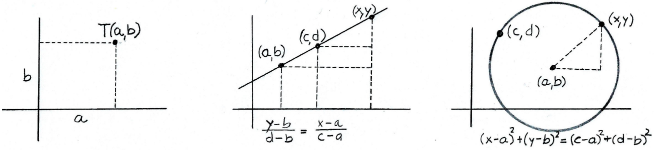
• **Krivulja** $\leftrightarrow$ **Enačba**. René Descartes (1637), Pierre de Fermat (1636). Koordinate že davno prej: Apolonij iz Perge (-3. stol), Eratosten iz Kirene (-3. stol), na sferi: vzporedniki in poldnevniki. Nicholas Oresme (14. stol): poskus matematizacije fizike – grafični dokaz izreka o povprečni hitrosti.

• **Simbolizacija in notacija**. Mezopotamija, Egipt: konkretni računi.



• **Krivulja** $\leftrightarrow$ **Enačba**. René Descartes (1637), Pierre de Fermat (1636). Koordinate že davno prej: Apolonij iz Perge (-3. stol), Eratosten iz Kirene (-3. stol), na sferi: vzporedniki in poldnevniki. Nicholas Oresme (14. stol): poskus matematizacije fizike – grafični dokaz izreka o povprečni hitrosti.

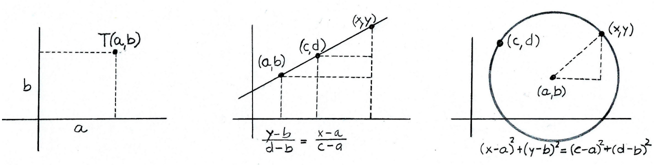
• **Simbolizacija in notacija**. Mezopotamija, Egipt: konkretni računi. Stari Grki (-4, -3. stol): retorična in geometrijska algebra, Diofant (+3.stol): sinkopirana algebra. Rabijo Indijci, Arabci, v Evropi do 17. stol.



• **Krivulja** $\leftrightarrow$ **Enačba**. René Descartes (1637), Pierre de Fermat (1636). Koordinate že davno prej: Apolonij iz Perge (-3. stol), Eratosten iz Kirene (-3. stol), na sferi: vzporedniki in poldnevniki. Nicholas Oresme (14. stol): poskus matematizacije fizike – grafični dokaz izreka o povprečni hitrosti.

• **Simbolizacija in notacija**. Mezopotamija, Egipt: konkretni računi. Stari Grki (-4, -3. stol): retorična in geometrijska algebra, Diofant (+3.stol): sinkopirana algebra. Rabijo Indijci, Arabci, v Evropi do 17. stol.

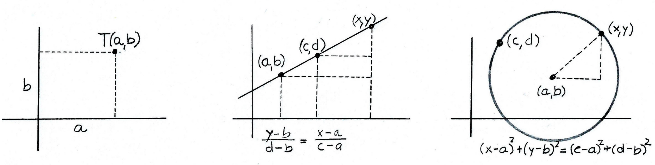
Girolamo Cardano, Ars Magna, 1545:



• **Krivulja** ↔ **Enačba**. René Descartes (1637), Pierre de Fermat (1636). Koordinate že davno prej: Apolonij iz Perge (-3. stol), Eratosten iz Kirene (-3. stol), na sferi: vzporedniki in poldnevniki. Nicholas Oresme (14. stol): poskus matematizacije fizike – grafični dokaz izreka o povprečni hitrosti.

• **Simbolizacija in notacija**. Mezopotamija, Egipt: konkretni računi. Stari Grki (-4, -3. stol): retorična in geometrijska algebra, Diofant (+3.stol): sinkopirana algebra. Rabijo Indijci, Arabci, v Evropi do 17. stol.

Girolamo Cardano, Ars Magna, 1545:
$1\bar{q}d\bar{q}d.p : 6\bar{q}d\ p : 36$ aequalia 60 pos $\equiv$

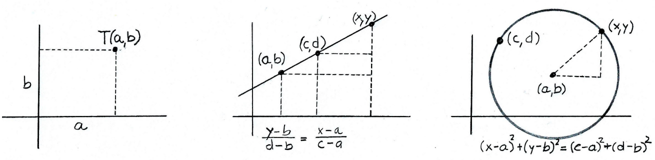


• **Krivulja ↔ Enačba**. René Descartes (1637), Pierre de Fermat (1636). Koordinate že davno prej: Apolonij iz Perge (-3. stol), Eratosten iz Kirene (-3. stol), na sferi: vzporedniki in poldnevniki. Nicholas Oresme (14. stol): poskus matematizacije fizike – grafični dokaz izreka o povprečni hitrosti.

• **Simbolizacija in notacija**. Mezopotamija, Egipt: konkretni računi. Stari Grki (-4, -3. stol): retorična in geometrijska algebra, Diofant (+3.stol): sinkopirana algebra. Rabijo Indijci, Arabci, v Evropi do 17. stol.

Girolamo Cardano, Ars Magna, 1545:
$1\bar{q}d\bar{q}d.p : 6\bar{q}d\ p : 36$ aequalia 60 pos $\equiv x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$,

Algebraizacija geometrije – koordinatizacija ravnine

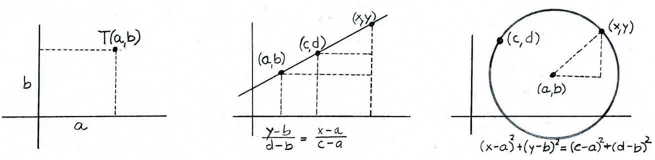


• **Krivulja** $\leftrightarrow$ **Enačba**. René Descartes (1637), Pierre de Fermat (1636). Koordinate že davno prej: Apolonij iz Perge (-3. stol), Eratosten iz Kirene (-3. stol), na sferi: vzporedniki in poldnevniki. Nicholas Oresme (14. stol): poskus matematizacije fizike – grafični dokaz izreka o povprečni hitrosti.

• **Simbolizacija in notacija**. Mezopotamija, Egipt: konkretni računi. Stari Grki (-4, -3. stol): retorična in geometrijska algebra, Diofant (+3.stol): sinkopirana algebra. Rabijo Indijci, Arabci, v Evropi do 17. stol.

Girolamo Cardano, Ars Magna, 1545:
$1\bar{q}d\bar{q}d.p : 6\bar{q}d\ p : 36$ aequalia 60 pos $\equiv x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$,
$+, -$ konec 15. stol., $=$ 16.stol.

Algebraizacija geometrije – koordinatizacija ravnine

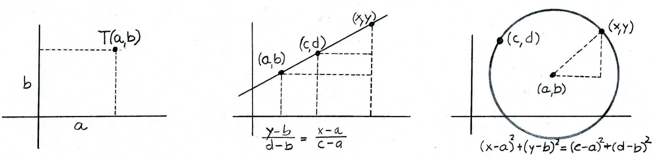


• **Krivulja** $\leftrightarrow$ **Enačba**. René Descartes (1637), Pierre de Fermat (1636). Koordinate že davno prej: Apolonij iz Perge (-3. stol), Eratosten iz Kirene (-3. stol), na sferi: vzporedniki in poldnevniki. Nicholas Oresme (14. stol): poskus matematizacije fizike – grafični dokaz izreka o povprečni hitrosti.

• **Simbolizacija in notacija**. Mezopotamija, Egipt: konkretni računi. Stari Grki (-4, -3. stol): retorična in geometrijska algebra, Diofant (+3.stol): sinkopirana algebra. Rabijo Indijci, Arabci, v Evropi do 17. stol.

Girolamo Cardano, Ars Magna, 1545:
$1\bar{q}d\bar{q}d.p : 6\bar{q}d\ p : 36$ aequalia 60 pos $\equiv x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$,
$+, -$ konec 15. stol., $=$ 16.stol.

Simbolična algebra: Francois Vièt, 1591.



• **Krivulja** $\leftrightarrow$ **Enačba**. René Descartes (1637), Pierre de Fermat (1636). Koordinate že davno prej: Apolonij iz Perge (-3. stol), Eratosten iz Kirene (-3. stol), na sferi: vzporedniki in poldnevniki. Nicholas Oresme (14. stol): poskus matematizacije fizike – grafični dokaz izreka o povprečni hitrosti.

• **Simbolizacija in notacija**. Mezopotamija, Egipt: konkretni računi. Stari Grki (-4, -3. stol): retorična in geometrijska algebra, Diofant (+3.stol): sinkopirana algebra. Rabijo Indijci, Arabci, v Evropi do 17. stol.

Girolamo Cardano, Ars Magna, 1545:
$1\bar{q}d\bar{q}d.p : 6\bar{q}d\ p$: 36 aequalia 60 pos $\equiv x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$,
$+, -$ konec 15. stol., $=$ 16.stol.

Simbolična algebra: Francois Vièt, 1591. Sodobna notacija: Descartes.

Konstruktibilnost točk

- Splošni problem: **konstruirati daljico s predpisano dolžino** d, to je, konstruirati dve točki na razdalji d. $\rightarrow$ **Konstruktibilnost točk**.

Konstruktibilnost točk

- Splošni problem: **konstruirati daljico s predpisano dolžino** d, to je, konstruirati dve točki na razdalji d. $\rightarrow$ **Konstruktibilnost točk**.
- **Prvi trije Evklidovi postulati**:

Konstruktibilnost točk

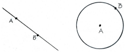
• Splošni problem: **konstruirati daljico s predpisano dolžino** d, to je, konstruirati dve točki na razdalji d. $\rightarrow$ **Konstruktibilnost točk**.

• **Prvi trije Evklidovi postulati**: Mogoče je narisati premico skozi dve dani točki ter načrtati krožnico z danim središčem skozi dano točko.

Konstruktibilnost točk

• Splošni problem: **konstruirati daljico s predpisano dolžino** d, to je, konstruirati dve točki na razdalji d. $\rightarrow$ **Konstruktibilnost točk**.

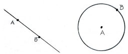
• **Prvi trije Evklidovi postulati**: Mogoče je narisati premico skozi dve dani točki ter načrtati krožnico z danim središčem skozi dano točko. Dovoljena je uporaba neoznačenega ravnila ter šestila, ki se sklopi, ko ga odmaknemo. Zato ni mogoče meriti ali s šestilom prenašati razdalj.



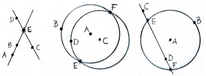
Konstruktibilnost točk

• Splošni problem: **konstruirati daljico s predpisano dolžino** d, to je, konstruirati dve točki na razdalji d. → **Konstruktibilnost točk**.

• **Prvi trije Evklidovi postulati**: Mogoče je narisati premico skozi dve dani točki ter načrtati krožnico z danim središčem skozi dano točko. Dovoljena je uporaba neoznačenega ravnila ter šestila, ki se sklopi, ko ga odmaknemo. Zato ni mogoče meriti ali s šestilom prenašati razdalj.



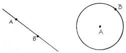
• Dano množico točk **konstrukcijsko razširimo**, s tem da **dodamo preseke** premic, krožnic ter s krožnicami, ki jih dane točke določajo.



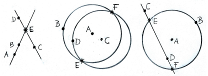
Konstruktibilnost točk

• Splošni problem: **konstruirati daljico s predpisano dolžino** d, to je, konstruirati dve točki na razdalji d. $\rightarrow$ **Konstruktibilnost točk**.

• **Prvi trije Evklidovi postulati**: Mogoče je narisati premico skozi dve dani točki ter načrtati krožnico z danim središčem skozi dano točko. Dovoljena je uporaba neoznačenega ravnila ter šestila, ki se sklopi, ko ga odmaknemo. Zato ni mogoče meriti ali s šestilom prenašati razdalj.



• Dano množico točk **konstrukcijsko razširimo**, s tem da **dodamo preseke** premic, krožnic ter s krožnicami, ki jih dane točke določajo.



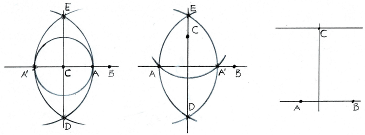
• $\mathcal{K}_0$: dve točki (definirata enotsko razdaljo). Množico **konstruktibilnih točk** K dobimo, če konstrukcijsko razširitev iteriramo (do neskončnosti).

$$\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2 \subset \ldots \mathcal{K}_n \subset \ldots \subset \ldots \mathcal{K}.$$

Najprej zgradimo koordinatni sistem. Rabimo tri osnovne konstrukcije.

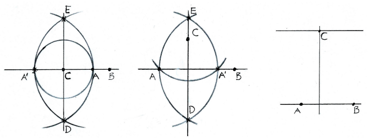
Najprej zgradimo koordinatni sistem. Rabimo tri osnovne konstrukcije.

- Konstrukcija pravokotnice v dani točki na premici
- Konstrukcija pravokotnice na premico skozi točko, ki ni na premici.
- Konstrukcija vzporednice skozi točko, ki ni na dani premici.



Najprej zgradimo koordinatni sistem. Rabimo tri osnovne konstrukcije.

- Konstrukcija pravokotnice v dani točki na premici
- Konstrukcija pravokotnice na premico skozi točko, ki ni na premici.
- Konstrukcija vzporednice skozi točko, ki ni na dani premici.

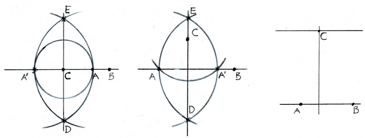


- **Koordinatni sistem**. Premica skozi začetni točki = **abscisna os**, začetni točki sta $(0,0)$ in $(1,0)$. V točki $(0,0)$ načrtamo pravokotnico na abscisno os $\rightarrow$ **ordinatna os**. Konstruiramo točko $(0,1)$.

Algebraizacija konstruktibilnosti

Najprej zgradimo koordinatni sistem. Rabimo tri osnovne konstrukcije.

- Konstrukcija pravokotnice v dani točki na premici
- Konstrukcija pravokotnice na premico skozi točko, ki ni na premici.
- Konstrukcija vzporednice skozi točko, ki ni na dani premici.



- **Koordinatni sistem**. Premica skozi začetni točki = **abscisna os**, začetni točki sta $(0, 0)$ in $(1, 0)$. V točki $(0, 0)$ načrtamo pravokotnico na abscisno os $\rightarrow$ **ordinatna os**. Konstruiramo točko $(0, 1)$.

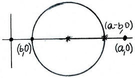
- Točke na koordinatnih oseh identificiramo z realnimi števili. Točka je konstruktibilna $\Leftrightarrow$ obe njeni koordinati sta **konstruktibilni števili**: $\in \mathbb{K}$.

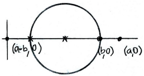
Lastnosti konstruktibilnih števil $\mathbb{K}$

- Števili 0 in 1 sta po definicij konstruktibilni: $0, 1 \in \mathbb{K}$.

Lastnosti konstruktibilnih števil $\mathbb{K}$

- Števili 0 in 1 sta po definicij konstruktibilni: $0, 1 \in \mathbb{K}$.
- $a, b \in \mathbb{K} \Rightarrow a - b \in \mathbb{K}$. Posledica: $-b \in \mathbb{K}$ in $a + b \in \mathbb{K}$.

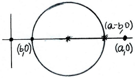


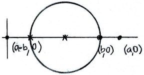


Lastnosti konstruktibilnih števil $\mathbb{K}$

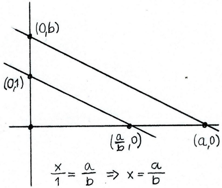
- Števili 0 in 1 sta po definicij konstruktibilni: $0, 1 \in \mathbb{K}$.

- $a, b \in \mathbb{K} \Rightarrow a - b \in \mathbb{K}$. Posledica: $-b \in \mathbb{K}$ in $a + b \in \mathbb{K}$.



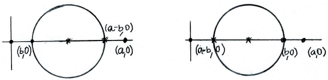


- $a, b \in \mathbb{K}$ in $b \neq 0 \Rightarrow a/b \in \mathbb{K}$. Posledica: $a, b \in \mathbb{K} \Rightarrow ab \in \mathbb{K}$

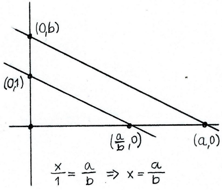


Lastnosti konstruktibilnih števil $\mathbb{K}$

- Števili 0 in 1 sta po definicij konstruktibilni: $0, 1 \in \mathbb{K}$.
- $a, b \in \mathbb{K} \Rightarrow a - b \in \mathbb{K}$. Posledica: $-b \in \mathbb{K}$ in $a + b \in \mathbb{K}$.



- $a, b \in \mathbb{K}$ in $b \neq 0 \Rightarrow a/b \in \mathbb{K}$. Posledica: $a, b \in \mathbb{K} \Rightarrow ab \in \mathbb{K}$

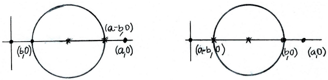


- Množica $\mathbb{K}$ je zaprta za vse štiri osnovne računske operacije, $+, -, \cdot, /$.

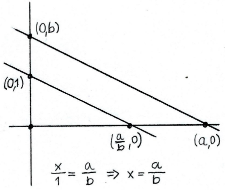
Lastnosti konstruktibilnih števil $\mathbb{K}$

- Števili 0 in 1 sta po definicij konstruktibilni: $0, 1 \in \mathbb{K}$.

- $a, b \in \mathbb{K} \Rightarrow a - b \in \mathbb{K}$. Posledica: $-b \in \mathbb{K}$ in $a + b \in \mathbb{K}$.



- $a, b \in \mathbb{K}$ in $b \neq 0 \Rightarrow a/b \in \mathbb{K}$. Posledica: $a, b \in \mathbb{K} \Rightarrow ab \in \mathbb{K}$

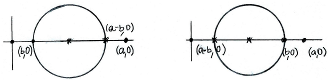


- Množica $\mathbb{K}$ je zaprta za vse štiri osnovne računske operacije, $+, -, \cdot, /$.
Vsaki podmnožici realnih števil $\mathbb{R}$, ki vsebuje vsaj 0 in 1 in je zaprta za $+, -, \cdot, /$, pravimo **številsko polje**.

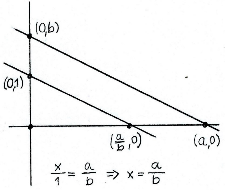
Lastnosti konstruktibilnih števil $\mathbb{K}$

- Števili 0 in 1 sta po definicij konstruktibilni: $0, 1 \in \mathbb{K}$.

- $a, b \in \mathbb{K} \Rightarrow a - b \in \mathbb{K}$. Posledica: $-b \in \mathbb{K}$ in $a + b \in \mathbb{K}$.



- $a, b \in \mathbb{K}$ in $b \neq 0 \Rightarrow a/b \in \mathbb{K}$. Posledica: $a, b \in \mathbb{K} \Rightarrow ab \in \mathbb{K}$



- Množica $\mathbb{K}$ je zaprta za vse štiri osnovne računske operacije, $+, -, \cdot, /$.
Vsaki podmnožici realnih števil $\mathbb{R}$, ki vsebuje vsaj 0 in 1 in je zaprta za $+, -, \cdot, /$, pravimo **številsko polje**.
- Množica racionalnih števil $\mathbb{Q}$ in množica konstruktibilnih števil $\mathbb{K}$ sta številski polji. **Racionalna števila so konstruktibilna**: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$.

Nov pogled na iteracijo

Nov pogled na iteracijo

- Naj bo $\mathbb{K}_n$ najmanjša podmnožica v $\mathbb{R}$, ki vsebuje koordinate K_n na n-tem koraku iteracije in ki je zaprta za $+, -, \cdot, /$. To je namanjše številsko polje, ki vsebuje K_n. Velja $K_0 = \{0, 1\}$, $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$ in $\mathbb{K}_n \subset \mathbb{K}$.

Nov pogled na iteracijo

- Naj bo $\mathbb{K}_n$ najmanjša podmnožica v $\mathbb{R}$, ki vsebuje koordinate K_n na n-tem koraku iteracije in ki je zaprta za $+, -, \cdot, /$. To je namanjše številsko polje, ki vsebuje K_n. Velja $K_0 = \{0, 1\}$, $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$ in $\mathbb{K}_n \subset \mathbb{K}$.

$$K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots K_n \subset K_{n+1} \subset \ldots \subset \ldots \mathbb{K}$$
$$\mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2 \subseteq \ldots \mathbb{K}_n \subseteq \mathbb{K}_{n+1} \subseteq \ldots \subseteq \ldots \mathbb{K}$$

Nov pogled na iteracijo

• Naj bo $\mathbb{K}_n$ najmanjša podmnožica v $\mathbb{R}$, ki vsebuje koordinate K_n na n-tem koraku iteracije in ki je zaprta za $+, -, \cdot, /$. To je namanjše številsko polje, ki vsebuje K_n. Velja $K_0 = \{0, 1\}$, $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$ in $\mathbb{K}_n \subset \mathbb{K}$.

$$K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots K_n \subset K_{n+1} \subset \ldots \subset \ldots \mathbb{K}$$
$$\mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2 \subseteq \ldots \mathbb{K}_n \subseteq \mathbb{K}_{n+1} \subseteq \ldots \subseteq \ldots \mathbb{K}$$

• Koordinati preseka dveh $\mathcal{K}_n$-premic ležijo v polju $\mathbb{K}_n$, ker potrebujemo le osnovne računske operacije $+, -, \cdot, /$. Zato je $\mathbb{K}_{n+1} = \mathbb{K}_n$.

$$\frac{y-b_1}{d_1-b_1} = \frac{x-a_1}{c_1-a_1} \text{ in } \frac{y-b_2}{d_2-b_2} = \frac{x-a_2}{c_2-a_2}$$

- Naj bo $\mathbb{K}_n$ najmanjša podmnožica v $\mathbb{R}$, ki vsebuje koordinate K_n na n-tem koraku iteracije in ki je zaprta za $+, -, \cdot, /$. To je namanjše številsko polje, ki vsebuje K_n. Velja $K_0 = \{0, 1\}$, $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$ in $\mathbb{K}_n \subset \mathbb{K}$.

$$K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots K_n \subset K_{n+1} \subset \ldots \subset \ldots \mathbb{K}$$
$$\mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2 \subseteq \ldots \mathbb{K}_n \subseteq \mathbb{K}_{n+1} \subseteq \ldots \subseteq \ldots \mathbb{K}$$

- Koordinati preseka dveh $\mathcal{K}_n$-premic ležijo v polju $\mathbb{K}_n$, ker potrebujemo le osnovne računske operacije $+, -, \cdot, /$. Zato je $\mathbb{K}_{n+1} = \mathbb{K}_n$.

$$\frac{y-b_1}{d_1-b_1} = \frac{x-a_1}{c_1-a_1} \text{ in } \frac{y-b_2}{d_2-b_2} = \frac{x-a_2}{c_2-a_2}$$

- Koordinati preseka $\mathcal{K}_n$-krožnic ali $\mathcal{K}_n$-premice in $\mathcal{K}_n$-krožnice pa imajo v splošem obliko $a + b\sqrt{c}, \quad a, b \in \mathbb{K}_n, c \in \mathbb{K}_n^+$. Zato je $\mathbb{K}_n \subset \mathbb{K}_{n+1}$.

$$\begin{aligned}
(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 &= (c_1-a_1)^2 + (d_1-b_2)^2 \\
(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 &= (c_2-a_2)^2 + (d_2-b_2)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(y-b_1)/(d_1-b_1) &= (x-a_1)/(c_1-a_1) \\
(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 &= (c_2-a_2)^2 + (d_2-b_2)^2
\end{aligned}$$

Nov pogled na iteracijo

- Naj bo $\mathbb{K}_n$ najmanjša podmnožica v $\mathbb{R}$, ki vsebuje koordinate K_n na n-tem koraku iteracije in ki je zaprta za $+, -, \cdot, /$. To je namanjše številsko polje, ki vsebuje K_n. Velja $K_0 = \{0, 1\}$, $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$ in $\mathbb{K}_n \subset \mathbb{K}$.

$$K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots K_n \subset K_{n+1} \subset \ldots \subset \ldots \mathbb{K}$$
$$\mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2 \subseteq \ldots \mathbb{K}_n \subseteq \mathbb{K}_{n+1} \subseteq \ldots \subseteq \ldots \mathbb{K}$$

- Koordinati preseka dveh $\mathcal{K}_n$-premic ležijo v polju $\mathbb{K}_n$, ker potrebujemo le osnovne računske operacije $+, -, \cdot, /$. Zato je $\mathbb{K}_{n+1} = \mathbb{K}_n$.

$$\frac{y-b_1}{d_1-b_1} = \frac{x-a_1}{c_1-a_1} \text{ in } \frac{y-b_2}{d_2-b_2} = \frac{x-a_2}{c_2-a_2}$$

- Koordinati preseka $\mathcal{K}_n$-krožnic ali $\mathcal{K}_n$-premice in $\mathcal{K}_n$-krožnice pa imajo v splošem obliko $a + b\sqrt{c}, \quad a, b \in \mathbb{K}_n, c \in \mathbb{K}_n^+$. Zato je $\mathbb{K}_n \subset \mathbb{K}_{n+1}$.

$$\begin{aligned} (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 &= (c_1-a_1)^2 + (d_1-b_2)^2 \\ (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 &= (c_2-a_2)^2 + (d_2-b_2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (y-b_1)/(d_1-b_1) &= (x-a_1)/(c_1-a_1) \\ (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 &= (c_2-a_2)^2 + (d_2-b_2)^2 \end{aligned}$$

Za taka števila rečemo, da jih dobimo z **adjunkcijo kvadratnih korenov**.

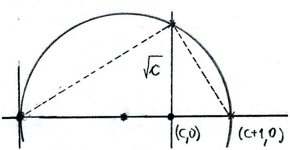
Karakterizacija konstruktibilnih števil $\mathbb{K}$

- Videli smo: vsako konstruktibilno število dobimo iz $\mathbb{Q}$ v končno mnogo korakih z uporabo osnovnih računskih operacij in kvadratnih korenov.

- Videli smo: vsako konstruktibilno število dobimo iz $\mathbb{Q}$ v končno mnogo korakih z uporabo osnovnih računskih operacij in kvadratnih korenov. Ali je vsako realno število, ki ga dobimo na tak način, konstruktibilno?

- Videli smo: vsako konstruktibilno število dobimo iz $\mathbb{Q}$ v končno mnogo korakih z uporabo osnovnih računskih operacij in kvadratnih korenov. Ali je vsako realno število, ki ga dobimo na tak način, konstruktibilno?

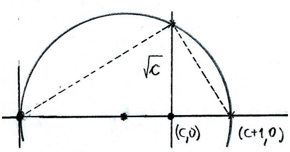
- Poljubno tako število je oblike $a + b\sqrt{c}$, kjer so a, b in $c > 0$ števila, ki smo jih dobili na prejšnjem koraku. Če indukcijsko predpostavimo, da so le-ta konstruktibilna, je dovolj pokazati: $c \in \mathbb{K} \Rightarrow \sqrt{c} \in \mathbb{K}$.



Karakterizacija konstruktibilnih števil $\mathbb{K}$

• Videli smo: vsako konstruktibilno število dobimo iz $\mathbb{Q}$ v končno mnogo korakih z uporabo osnovnih računskih operacij in kvadratnih korenov. Ali je vsako realno število, ki ga dobimo na tak način, konstruktibilno?

• Poljubno tako število je oblike $a + b\sqrt{c}$, kjer so a, b in $c > 0$ števila, ki smo jih dobili na prejšnjem koraku. Če indukcijsko predpostavimo, da so le-ta konstruktibilna, je dovolj pokazati: $c \in \mathbb{K} \Rightarrow \sqrt{c} \in \mathbb{K}$.



IZREK 1. Konstruktibilna števila so natanko tista, ki jih iz $\mathbb{Q}$ dobimo v končno mnogo korakih, s tem da na vsakem koraku uporabimo osnovne računske operacije ter adjunkcijo kvadratnih korenov tistih pozitivnih števil, ki smo jih dobili na prejšnjih korakih.

Test konstruktibilnosti

Test konstruktibilnosti

- Karakterizacija konstruktibilnosti iz Izreka 1 ni uporabna. Radi bi kako karakterizacijo, ki se ne sklicuje na iterativni postopek.

Test konstruktibilnosti

- Karakterizacija konstruktibilnosti iz Izreka 1 ni uporabna. Radi bi kako karakterizacijo, ki se ne sklicuje na iterativni postopek.

- Vpeljimo naslednji pojem. Realno število je **algebraično**, če zadošča kaki polinomski enačbi z racionalnimi koeficienti. Vsa algebraična števila $\mathbb{A}$ tvorijo številsko polje. Ostala realna števila, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$, so **transcendenta**.

Test konstruktibilnosti

- Karakterizacija konstruktibilnosti iz Izreka 1 ni uporabna. Radi bi kako karakterizacijo, ki se ne sklicuje na iterativni postopek.

- Vpeljimo naslednji pojem. Realno število je **algebraično**, če zadošča kaki polinomski enačbi z racionalnimi koeficienti. Vsa algebraična števila $\mathbb{A}$ tvorijo številsko polje. Ostala realna števila, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$, so **transcendenta**.

$x = 1 + \sqrt{5}$: $x^2 - 2x - 4 = 0$.

$x = \sqrt[3]{2}$: $x^3 - 2 = 0$.

$x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$: $x^4 - 8x^2 - 2x + 2 = 0$.

Test konstruktibilnosti

• Karakterizacija konstruktibilnosti iz Izreka 1 ni uporabna. Radi bi kako karakterizacijo, ki se ne sklicuje na iterativni postopek.

• Vpeljimo naslednji pojem. Realno število je **algebraično**, če zadošča kaki polinomski enačbi z racionalnimi koeficienti. Vsa algebraična števila $\mathbb{A}$ tvorijo številsko polje. Ostala realna števila, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$, so **transcendenta**.

$x = 1 + \sqrt{5}$: $x^2 - 2x - 4 = 0$.

$x = \sqrt[3]{2}$: $x^3 - 2 = 0$.

$x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$: $x^4 - 8x^2 - 2x + 2 = 0$.

Za algebraično število obstaja tudi polinomska enačba minimalne stopnje, ki ji tako število še zadošča. Ustrezni polinom je (v bistvu) en sam, to je **minimalni polinom** algebraičnega števila. Gornji primeri so minimalni.

Test konstruktibilnosti

• Karakterizacija konstruktibilnosti iz Izreka 1 ni uporabna. Radi bi kako karakterizacijo, ki se ne sklicuje na iterativni postopek.

• Vpeljimo naslednji pojem. Realno število je **algebraično**, če zadošča kaki polinomski enačbi z racionalnimi koeficienti. Vsa algebraična števila $\mathbb{A}$ tvorijo številsko polje. Ostala realna števila, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$, so **transcendenta**.

$x = 1 + \sqrt{5}$: $x^2 - 2x - 4 = 0$.

$x = \sqrt[3]{2}$: $x^3 - 2 = 0$.

$x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$: $x^4 - 8x^2 - 2x + 2 = 0$.

Za algebraično število obstaja tudi polinomska enačba minimalne stopnje, ki ji tako število še zadošča. Ustrezni polinom je (v bistvu) en sam, to je **minimalni polinom** algebraičnega števila. Gornji primeri so minimalni.

IZREK 2. Konstruktibilna števila so algebraična, $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{A}$.

Test konstruktibilnosti

• Karakterizacija konstruktibilnosti iz Izreka 1 ni uporabna. Radi bi kako karakterizacijo, ki se ne sklicuje na iterativni postopek.

• Vpeljimo naslednji pojem. Realno število je **algebraično**, če zadošča kaki polinomski enačbi z racionalnimi koeficienti. Vsa algebraična števila $\mathbb{A}$ tvorijo številsko polje. Ostala realna števila, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$, so **transcendenta**.

$x = 1 + \sqrt{5}$: $x^2 - 2x - 4 = 0$.

$x = \sqrt[3]{2}$: $x^3 - 2 = 0$.

$x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$: $x^4 - 8x^2 - 2x + 2 = 0$.

Za algebraično število obstaja tudi polinomska enačba minimalne stopnje, ki ji tako število še zadošča. Ustrezni polinom je (v bistvu) en sam, to je **minimalni polinom** algebraičnega števila. Gornji primeri so minimalni.

IZREK 2. Konstruktibilna števila so algebraična, $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{A}$. Algebraično število je konstruktibilno $\Leftrightarrow$ stopnja njegovega minimalnega polinoma je neka potenca števila 2.

Test konstruktibilnosti

• Karakterizacija konstruktibilnosti iz Izreka 1 ni uporabna. Radi bi kako karakterizacijo, ki se ne sklicuje na iterativni postopek.

• Vpeljimo naslednji pojem. Realno število je **algebraično**, če zadošča kaki polinomski enačbi z racionalnimi koeficienti. Vsa algebraična števila $\mathbb{A}$ tvorijo številsko polje. Ostala realna števila, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$, so **transcendenta**.

$x = 1 + \sqrt{5}$: $x^2 - 2x - 4 = 0$.

$x = \sqrt[3]{2}$: $x^3 - 2 = 0$.

$x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$: $x^4 - 8x^2 - 2x + 2 = 0$.

Za algebraično število obstaja tudi polinomska enačba minimalne stopnje, ki ji tako število še zadošča. Ustrezni polinom je (v bistvu) en sam, to je **minimalni polinom** algebraičnega števila. Gornji primeri so minimalni.

IZREK 2. Konstruktibilna števila so algebraična, $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{A}$. Algebraično število je konstruktibilno $\Leftrightarrow$ stopnja njegovega minimalnega polinoma je neka potenca števila 2.

Za dokaz potrebujemo neelementarne pojme iz abstraktne algebre: razširitev polj, razcepnost enačb, vektorske prostore, etc.

Trije klasični problemi so konstrukcijsko nerešljivi

Trije klasični problemi so konstrukcijsko nerešljivi

- **Podvojitev kocke**. Za dano konstruktibilno dolžino a je potrebno konstruirati dolžino $b = a\sqrt[3]{2}$. A to ni mogoče: minimalna polinomska enačba za $\sqrt[3]{2}$ je $x^3 - 2 = 0$, zato $\sqrt[3]{2}$ po Izreku 2 ni konstruktibilno število. (Pierre Wantzel, 1837). [Viet, Descates]

Trije klasični problemi so konstrukcijsko nerešljivi

• **Podvojitev kocke**. Za dano konstruktibilno dolžino a je potrebno konstruirati dolžino $b = a\sqrt[3]{2}$. A to ni mogoče: minimalna polinomska enačba za $\sqrt[3]{2}$ je $x^3 - 2 = 0$, zato $\sqrt[3]{2}$ po Izreku 2 ni konstruktibilno število. (Pierre Wantzel, 1837). [Viet, Descates]

• **Tretinjenje kota**. Kot α je mogoče tretinjiti, če lahko konstruiramo dolžino $\cos(\alpha/3)$. Pokažemo, da kota 60° ni mogoče tretinjiti. Zaradi

$$\cos\alpha = 4\cos^3(\alpha/3) - 3\cos(\alpha/3)$$

sledi, da $x = \cos(20^\circ)$ zadošča enačbi $4x^3 - 3x - 1/2 = 0$. Lahko pokažemo, da je to minimalna enačba. Po Izreku 2, število $\cos(20^\circ)$ ni konstruktibilno. (Pierre Wantzel, 1837) [Viet, Descates]

Trije klasični problemi so konstrukcijsko nerešljivi

• **Podvojitev kocke**. Za dano konstruktibilno dolžino a je potrebno konstruirati dolžino $b = a\sqrt[3]{2}$. A to ni mogoče: minimalna polinomska enačba za $\sqrt[3]{2}$ je $x^3 - 2 = 0$, zato $\sqrt[3]{2}$ po Izreku 2 ni konstruktibilno število. (Pierre Wantzel, 1837). [Viet, Descates]

• **Tretinjenje kota**. Kot α je mogoče tretinjiti, če lahko konstruiramo dolžino $\cos(\alpha/3)$. Pokažemo, da kota 60° ni mogoče tretinjiti. Zaradi

$$\cos\alpha = 4\cos^3(\alpha/3) - 3\cos(\alpha/3)$$

sledi, da $x = \cos(20^\circ)$ zadošča enačbi $4x^3 - 3x - 1/2 = 0$. Lahko pokažemo, da je to minimalna enačba. Po Izreku 2, število $\cos(20^\circ)$ ni konstruktibilno. (Pierre Wantzel, 1837) [Viet, Descates]

• **Kvadratura kroga**. Če je r (konstruktibilni) polmer danega kroga, je potrebno konstruirati dolžino $a = r\sqrt{\pi}$. To bi bilo možno, če bi bilo število π konstruktibilno. A to ni res: **število π je trascendentno**, torej niti algebraično ni (Ferdinand von Lindemann, 1882).

Trije klasični problemi so konstrukcijsko nerešljivi

• **Podvojitev kocke**. Za dano konstruktibilno dolžino a je potrebno konstruirati dolžino $b = a\sqrt[3]{2}$. A to ni mogoče: minimalna polinomska enačba za $\sqrt[3]{2}$ je $x^3 - 2 = 0$, zato $\sqrt[3]{2}$ po Izreku 2 ni konstruktibilno število. (Pierre Wantzel, 1837). [Viet, Descates]

• **Tretinjenje kota**. Kot α je mogoče tretinjiti, če lahko konstruiramo dolžino $\cos(\alpha/3)$. Pokažemo, da kota 60° ni mogoče tretinjiti. Zaradi

$$\cos\alpha = 4\cos^3(\alpha/3) - 3\cos(\alpha/3)$$

sledi, da $x = \cos(20^\circ)$ zadošča enačbi $4x^3 - 3x - 1/2 = 0$. Lahko pokažemo, da je to minimalna enačba. Po Izreku 2, število $\cos(20^\circ)$ ni konstruktibilno. (Pierre Wantzel, 1837) [Viet, Descates]

• **Kvadratura kroga**. Če je r (konstruktibilni) polmer danega kroga, je potrebno konstruirati dolžino $a = r\sqrt{\pi}$. To bi bilo možno, če bi bilo število π konstruktibilno. A to ni res: **število π je trascendentno**, torej niti algebraično ni (Ferdinand von Lindemann, 1882).

Dokaz je bolj zahteven: potrebujemo neelementarne koncepte iz analize.