Kako matematika oblikuje digitalni svet

Safet Penjić
Univerza na Primorskem

22. januar 2025.

Kazalo

2D grafika

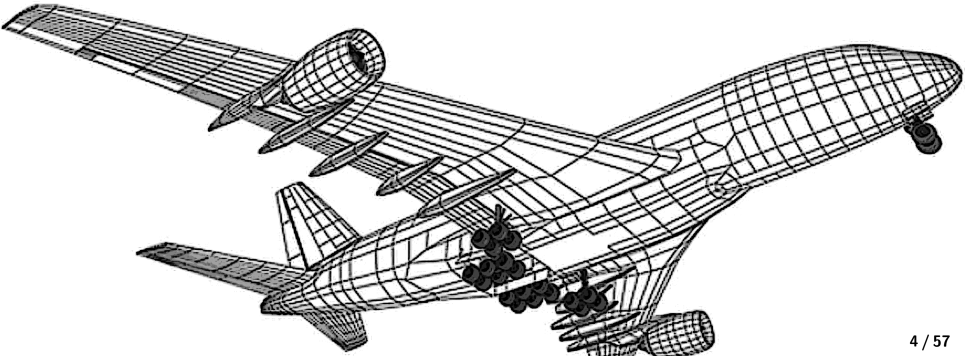
Vsak, ki študira računalniški jezik, neizogibno preživi nekaj časa pri učenju uporabe vsaj dvodimenzionalne (2D) grafike, kaj bomo počeli v začetku tega predavanja.

Pokazali bomo nekaj osnovnih matematičnih postopkov, ki se uporabljajo za manipulacijo in prikaz grafičnih slik.

Žični model letal

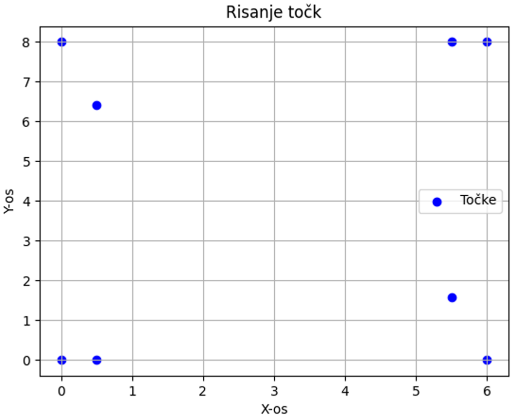
Npr. žični model letal (ali podoba slika) je sestavljena iz številnih točk, povezanih črt ali krivulj ter informacij o tem, kako zapolniti zaprta območja, omejena z črtami in krivuljami.

Pogosto so ukrivljene črte približane s kratkimi odseki ravnih črt, figura pa je matematično opredeljena z seznamom točk.



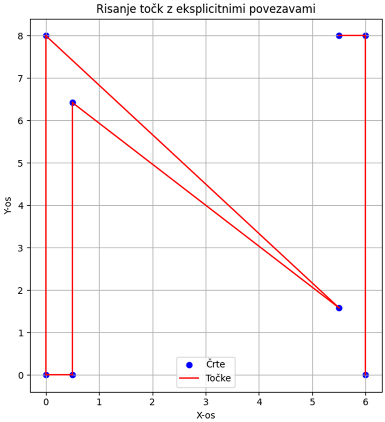
Koordinatni sistem in točke

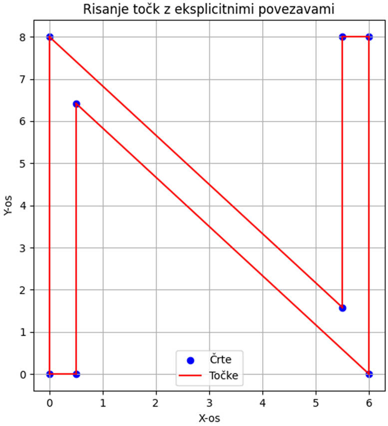
Naj imamo naslednjo množico točk. Isto množico točk bomo obravnavali v prvih par primerov. $A(0,0)$, $B(\frac{1}{2},0)$, $C(\frac{1}{2},6.42)$, $D(6,0)$, $E(6,8)$, $F(5.5,8)$, $G(5.5,1.58)$, $H(0,8)$.



Koordinatni sistem in točke (nad.)

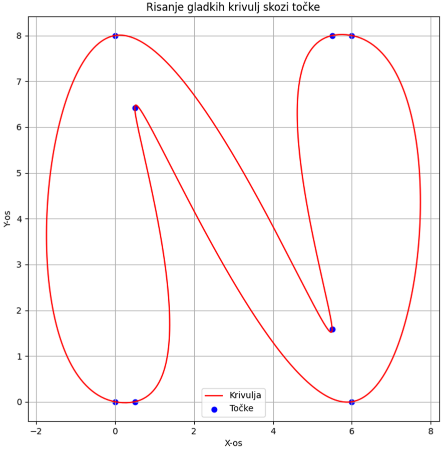
V odvisnosti od tega, kako povežemo dane točke, lahko dobimo različne geometrijske figure.





Koordinatni sistem in točke (nad.)

V odvisnosti od tega, kako povežemo dane točke, lahko dobimo različne geometrijske figure.



Torej, prvi korak v programiranju 2D grafike

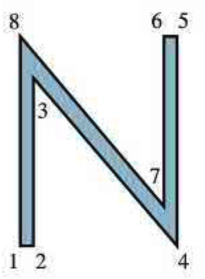
Kako narisati črko na računalniku?

1. korak - definiramo koordinatni sistem.
2. korak - narišemo točke v koordinatnem sistemu.

Črke na zaslonu

Med najpreprostejše simbole 2D grafike spadajo črke, ki se uporabljajo za oznake na zaslonu.

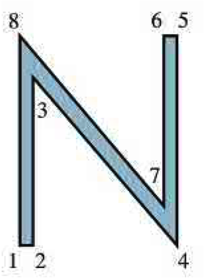
Nekatere črke so shranjene kot žični modeli, druge, ki vsebujejo ukrivljene dele, pa so shranjene z dodatnimi matematičnimi formulami za krivulje.



Primer 1

Velika črka N na sliki spodaj je določena z osmimi točkami ali oglišči. Koordinate točk so lahko shranjene v podatkovni matriki D.

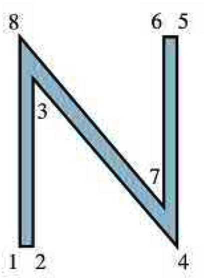
	oglišče							
	1	2	3	4	5	6	7	8
x-koordinata	0	0.5	0.5	6	6	5.5	5.5	0
y-koordinata	0	0	6.42	0	8	8	1.58	8



$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 6 & 6 & 5.5 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 6.42 & 0 & 8 & 8 & 1.58 & 8 \end{bmatrix}$$

Poleg matrike D je potrebno določiti, katera oglišča so povezana z linijami.

Primer 1 (nad.)



$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 6 & 6 & 5.5 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 6.42 & 0 & 8 & 8 & 1.58 & 8 \end{bmatrix}$$

Zaženimo naslednji program:

plot_points_v2.py

Grafični objekti in opisi

Glavni razlog, zakaj so grafični objekti opisani s sklopi ravnih črtnih segmentov, je ta, da standardne transformacije v računalniški grafiki preslikajo črtne segmente v druge črtne segmente.

Ko so oglišča, ki opisujejo objekt, transformirana, lahko njihove slike povežemo z ustreznimi ravnimi črtami, da dobimo celotno sliko prvotnega objekta.

Primer 2

Glede na matriko $A = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ opišite učinek strižne transformacije $x \to Ax$ na črko N v Primeru 1.

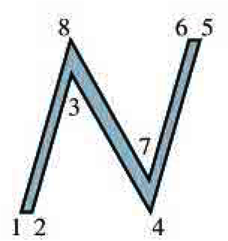
Matrično množenje:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix}$$

Primer 2 - rešitev

Po definiciji množenja matric stolpci produkta AD vsebujejo slike oglišč črke N.

$$AD = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 6 & 6 & 5.5 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 6.42 & 0 & 8 & 8 & 1.58 & 8 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 2.105 & 6 & 8 & 7.5 & 5.895 & 2 \\ 0 & 0 & 6.420 & 0 & 8 & 8 & 1.580 & 8 \end{bmatrix}$$



	oglišče							
	1	2	3	4	5	6	7	8
x-koordinata	0	0.5	2.105	6	8	7.5	5.895	2
y-koordinata	0	0	6.420	0	8	8	1.580	8

Primer 2 - rešitev (nad.)

Testirajmo dani primer z naslednjo Python kodo (plot_points_v3.py).

plot_points_v3.py

Primer 3

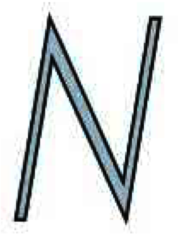
Poševna črka N iz primera 2 je videti nekoliko preširoka. Da to popravimo, zmanjšamo širino s transformacijo merila, ki vpliva na x-koordinate točk.

Izračunajte matriko transformacije, ki izvaja strižno transformacijo, kot v primeru 2, nato pa vse x-koordinate skalira s faktorjem 0.75.

Primer 3 - rešitev

Matrika, ki x-koordinate točke pomnoži z 0.75, je

$$B = \begin{bmatrix} 0.75 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Torej je matrika sestavljene transformacije

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} 0.75 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.75 & 0.1875 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Rezultat te sestavljene transformacije je prikazan na sliki levo.

Primer 3 - rešitev (nad.)

Testirajmo dani primer z naslednjo Python kodo (plot_points_v4.py).

plot_points_v4.py

Homogene koordinate

Razložimo enostaven premik figure na računalniškem zaslonu.

Vsako točko (x, y) v $\mathbb{R}^2$ lahko identificiramo s točko $(x, y, 1)$ na ravnini v $\mathbb{R}^3$, ki leži eno enoto nad xy-ravnino.

Pravimo, da ima (x, y) homogene koordinate $(x, y, 1)$.

Na primer, točka $(0, 0)$ ima homogene koordinate $(0, 0, 1)$.

Homogenih koordinat točk ne seštevamo ali množimo s skalarji, lahko pa jih transformiramo z množenjem z 3×3 matrikami.

Homogene koordinate - množenje matrik

Matrično množenje:

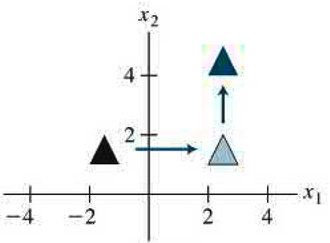
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + by + c \\ dx + ey + f \\ 1 \end{bmatrix}$$

Primer 4

Premik oblike $(x, y) \to (x + h, y + k)$ je v homogenih koordinatah zapisan kot $(x, y, 1) \to (x + h, y + k, 1)$. To transformacijo lahko izračunamo z množenjem matrik:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + h \\ y + k \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Primer 4 (nad.)



Premik za $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$. $D = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1.5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

	oglišče		
	1	2	3
x-koordinata	−2	−1	−1.5
y-koordinata	1	1	2

$$AD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1.5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & \frac{5}{2} \\ 4 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

	oglišče		
	$1'$	$2'$	$3'$
x-koordinata	2	3	$\frac{5}{2}$
y-koordinata	4	4	5

Primer 4 (nad.)

Testirajmo dani primer z naslednjo Python kodo (plot_points_v5.py).

plot_points_v5.py

Kako zdaj to uporabiti v računalniških igricah?

Naredimo program tako, da vsakič ko pritisnemo na gumb, na primer desno puščico na tipkovnici, program izvede naslednje korake:

Definiramo novo matriko D kot $A \cdot D$.

Narišemo koordinate nove matrike D.

Testirajmo dani primer z naslednjo Python kodo (plot_points_v6.py).

plot_points_v6.py

plot_points_v7.py

Tudi lahko vklopimo tudi levo puščico.

plot_points_v8.py

Primer 5

Vsako linearno transformacijo na $\mathbb{R}^2$ predstavimo glede na homogene koordinate z razdeljeno matriko oblike $\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, kjer je B matrika velikosti 2×2.

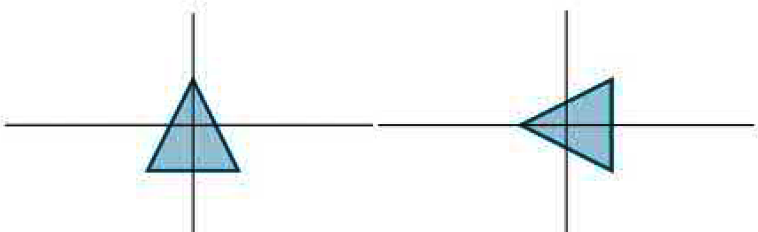
Tipični primeri so:
(1) Rotacija v nasprotni smeri urinega kazalca okoli izhodišča za kot φ,
(2) Zrcaljenje čez premico $y = x$,
(3) Skaliranje x s faktorjem s in y s faktorjem t.

Primer 5 - Rotacija

Rotacija v nasprotni smeri urinega kazalca okoli izhodišča za kot φ

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

	oglišče		
	1	2	3
x-koordinata	-2	2	0
y-koordinata	-2	-2	1



Primer 5 - Rotacija (nad.)

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$AD = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Primer 5 - Rotacija (nad.)

$$AD = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

	oglišče		
	$1'$	$2'$	$3'$
x-koordinata	2	2	-1
y-koordinata	-2	2	0

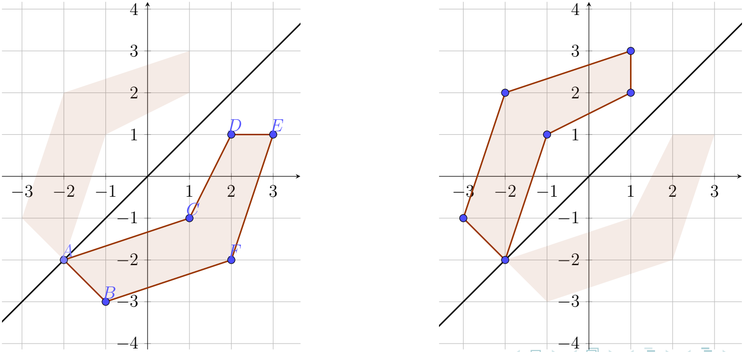
Zaženimo naslednji program:

plot_points_v9.py

Primer 5 - Zrcaljenje

Zrcaljenje čez premico $y = x$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Primer 5 - Zrcaljenje (nad)

	oglišče					
	A	B	C	D	E	F
x-koordinata	-2	-1	1	2	3	2
y-koordinata	-2	-3	-1	1	1	-2

$$M = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$TM = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Primer 5 - Zrcaljenje (nad)

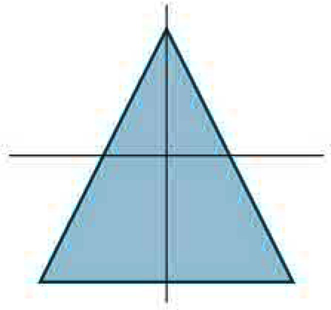
$$TM = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

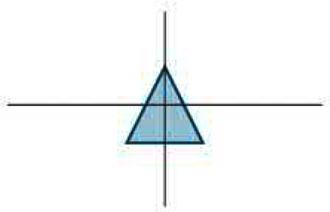
	oglišče					
	A'	B'	C'	D'	E'	F'
x-koordinata	-2	-3	-1	1	1	-2
y-koordinata	-2	-1	1	2	3	2

Primer 5 - Skaliranje

Skaliranje x s faktorjem s in y s faktorjem t

$$\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





Primer 5 - Skaliranje (nad.)

	oglišče		
	1	2	3
x-koordinata	-6	6	0
y-koordinata	-6	-6	3

$$M = \begin{bmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & -6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$TM = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & -6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Primer 5 - Skaliranje (nad.)

$$TM = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

	oglišče		
	$1'$	$2'$	$3'$
x-koordinata	-2	2	0
y-koordinata	-2	-2	1

Zaženimo naslednji program:

plot_points_v10.py

Primer 5 - Skaliranje (nad.)

Interakcija s uporabnikom:

plot_points_v11.py

Animacija

plot_points_v12.py

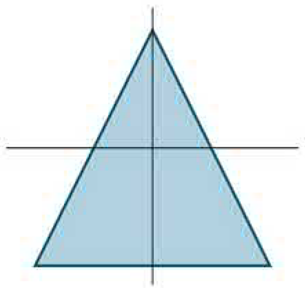
Sestavljene transformacije

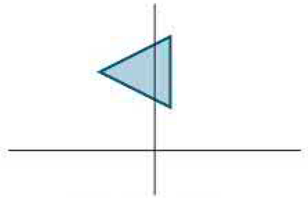
Premik figure na računalniškem zaslonu pogosto zahteva dve ali več osnovnih transformacij.

Sestavljanje takšnih transformacij ustreza množenju matrik, ko uporabljamo homogene koordinate.

Primer 6

Poiščite 3×3 matriko, ki ustreza sestavljeni transformaciji skaliranja s faktorjem $\frac{1}{3}$, rotacije za 90° okoli izhodišča in na koncu premika, ki vsaki točki figure doda $(-\frac{1}{2}, 2)$.





Primer 6 - rešitev

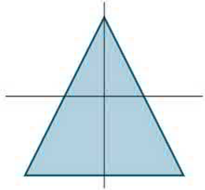
Če je $\varphi = \frac{\pi}{2}$, potem velja $\sin(\varphi) = 1$ in $\cos\varphi = 0$. Iz primerov 4 in 5 dobimo

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} &\xrightarrow{\text{skaliranje}} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow{\text{rotacija}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow{\text{premik}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

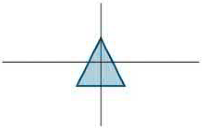
Primer 6 - rešitev

Matrika za sestavljeno transformacijo je

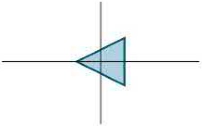
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

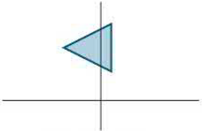


Izvirna figura

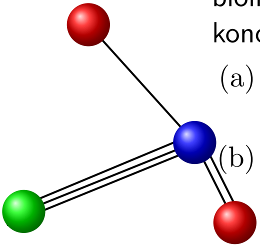


Po skaliranju





Molekularnih grafovi



Pri iskanju zdravil v kontekstu računalniške kemije, bioinformatike ali farmakologije se pogosto uporablja koncept molekularnih grafov, kjer so:

(a) vozlišča (atomi) elementi molekule (kot so ogljik, vodik, kisik ipd.),

(b) povezave (kemijske vezi) pa predstavljajo vezi med atomi (npr. enojne, dvojne, trojne vezi ali aromatske vezi). To omogoča modeliranje molekularnih struktur in njihovo analizo za iskanje potencialnih zdravilnih učinkovin.

Molekularnim modeliranje

Nekatera najnovejša in najbolj vznemirljiva dela na področju računalniške grafike so povezana z molekularnim modeliranjem.

Z uporabo 3D (tridimenzionalne) grafike lahko biolog pregleda simuliran proteinski molekul in išče aktivna mesta, ki bi lahko sprejela molekulo zdravila.

Biolog lahko vrti in premika eksperimentalno zdravilo ter poskuša pritrditi na protein.

Ta sposobnost vizualizacije potencialnih kemijskih reakcij je ključnega pomena za sodobne raziskave zdravil in raka.

Pravzaprav napredek pri oblikovanju zdravil v določeni meri temelji na napredku v zmožnosti računalniške grafike, da ustvari realistične simulacije molekul in njihovih interakcij.

Homogene 3D koordinate

Po analogiji z 2D primerom pravimo, da so $(x, y, z, 1)$ homogene koordinate za točko (x, y, z) v $\mathbb{R}^3$. Na splošno so (X, Y, Z, H) homogene koordinate za (x, y, z), če je $H \neq 0$ in velja

$$x = \frac{X}{H}, \qquad y = \frac{Y}{H}, \qquad \text{in} \qquad z = \frac{Z}{H}.$$

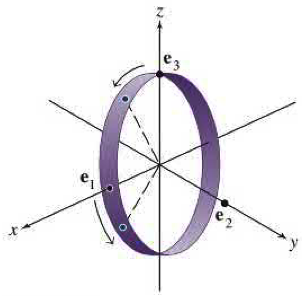
Vsak neničelni skalarni večkratnik $(x, y, z, 1)$ predstavlja množico homogenih koordinat za (x, y, z). Na primer, tako $(10, -6, 14, 2)$ kot $(-15, 9, -21, -3)$ sta homogene koordinate za $(5, -3, 7)$.

Primer 7

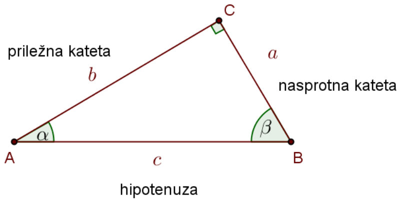
Podajte 4×4 matrike za naslednje transformacije:

(a) Rotacija okoli y-osi za kot $30°$. (Po dogovoru je pozitiven kot v nasprotni smeri urinega kazalca, če gledamo proti izhodišču z pozitivne polovice osi rotacije – v tem primeru y-osi.)

(b) Translacija z vektorjem $p = (-6, 4, 5)$.



Primer 7 - rešitev



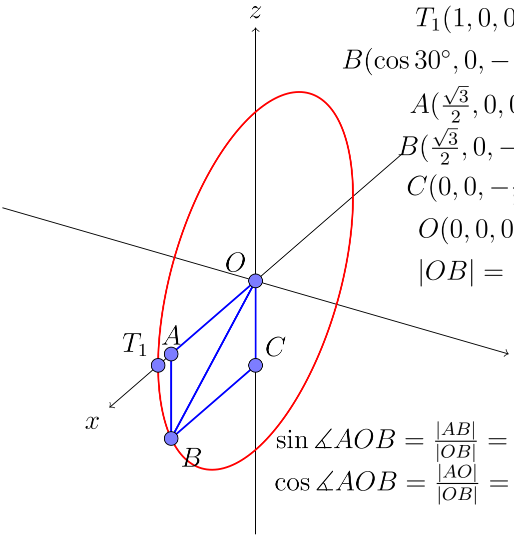
V rešitvi bomo uporabili definicijo kotnih funkcij. Spomnimo se: Sinus kota je v pravokotnem trikotniku razmerje med kotu nasproti ležečo kateto in hipotenuzo.

$$\sin\alpha = \sin\measuredangle CAB = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{a}{c}.$$

Kosinus kota je v pravokotnem trikotniku razmerje med kotu priležno kateto in hipotenuzo.

$$\cos\alpha = \cos\measuredangle CAB = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{b}{c}.$$

Primer 7 - rešitev (nad.)



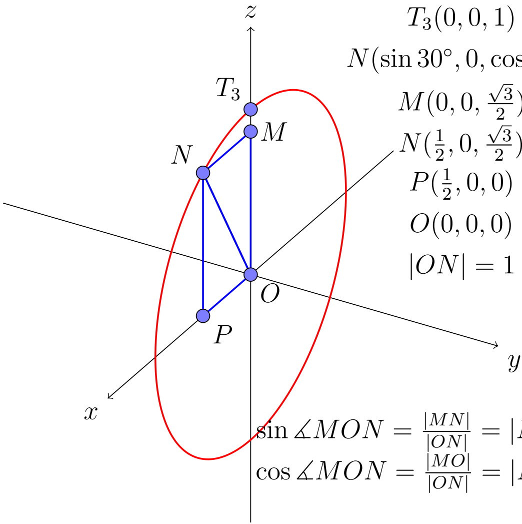
$$T_1(1,0,0)$$
$$B(\cos 30°, 0, -\sin 30°)$$
$$A(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0)$$
$$B(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\tfrac{1}{2})$$
$$C(0, 0, -\tfrac{1}{2})$$
$$O(0,0,0)$$
$$|OB| = 1$$

$$\sin \measuredangle AOB = \frac{|AB|}{|OB|} = |AB| = |OC|$$
$$\cos \measuredangle AOB = \frac{|AO|}{|OB|} = |AO| = |BC|$$

Želimo sestaviti 3×3 matriko za rotacijo.

Vektor $e_1 = (1, 0, 0)$ se vrti navzdol proti negativni z-osi in se ustavi pri $(\cos 30°, 0, -\sin 30°) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, -\frac{1}{2})$.

Primer 7 - rešitev (nad.)



$T_3(0,0,1)$

$N(\sin 30°, 0, \cos 30°)$

$M(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2})$

$N(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2})$

$P(\frac{1}{2},0,0)$

$O(0,0,0)$

$|ON| = 1$

$$\sin \measuredangle MON = \frac{|MN|}{|ON|} = |MN| = |OP|$$

$$\cos \measuredangle MON = \frac{|MO|}{|ON|} = |MO| = |PN|$$

Vektor $e_2 = (0,1,0)$ na y-osi se ne premika, medtem ko se e_3 na z-osi vrti navzdol proti pozitivni x-osi in se ustavi pri $(\sin 30°, 0, \cos 30°) = (\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Primer 7 - rešitev (nad.)

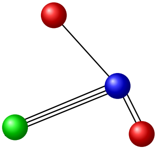
Standardna matrika za to rotacijo je

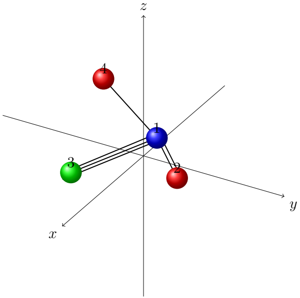
$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Tako je rotacijska matrika za homogene koordinate

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Primer 7 - rešitev (nad.)





	elementi molekule			
	1	2	3	4
x-koordinata	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{10}$
y-koordinata	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$
z-koordinata	$\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$

Primer 7 - rešitev (nad.)

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

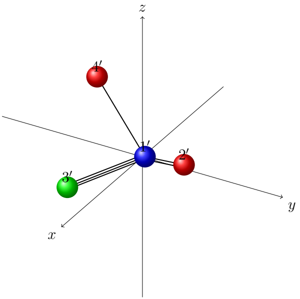
$$TA = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

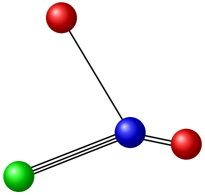
Primer 7 - rešitev (nad.)

$$TA = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{20} + \frac{3}{20} & -\frac{\sqrt{3}}{20} - \frac{1}{10} & \frac{3\sqrt{3}}{20} - \frac{1}{10} & \frac{1}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{20} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3\sqrt{3}}{20} - \frac{1}{20} & \frac{1}{20} - \frac{\sqrt{3}}{10} & -\frac{\sqrt{3}}{10} - \frac{3}{20} & \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{20} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

	elementi molekule			
	$1'$	$2'$	$3'$	$4'$
x-koordinata	$\frac{\sqrt{3}}{20} + \frac{3}{20}$	$-\frac{\sqrt{3}}{20} - \frac{1}{10}$	$\frac{3\sqrt{3}}{20} - \frac{1}{10}$	$\frac{1}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{20}$
y-koordinata	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$
z-koordinata	$\frac{3\sqrt{3}}{20} - \frac{1}{20}$	$\frac{1}{20} - \frac{\sqrt{3}}{10}$	$-\frac{\sqrt{3}}{10} - \frac{3}{20}$	$\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{20}$

Primer 7 - rešitev (nad.)





(b) Želimo, da se $(x, y, z, 1)$ preslika v $(x-6, y+4, z+5, 1)$. Matrika, ki to omogoča, je

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Perspektivna projekcija

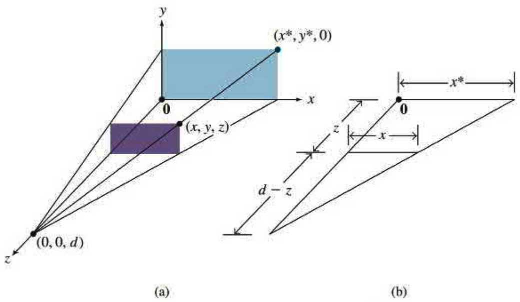
Trodimenzionalni objekt je na dvodimenzionalnem zaslonu računalnika predstavljen s projiciranjem objekta na projekcijsko ravnino. (Zanemarimo druge pomembne korake, kot je izbira dela projekcijske ravnine za prikaz na zaslonu.)

Za enostavnost naj xy-ravnina predstavlja zaslon računalnika, gledalčevo oko pa si predstavljamo na pozitivni z-osi, v točki $(0, 0, d)$.

Perspektivna projekcija preslika vsako točko (x, y, z) na slikovno točko $(x^*, y^*, 0)$ tako, da so obe točki in položaj očesa, imenovan središče projekcije, na isti premici.

Na spodnji sliki je prikazana perspektivna projekcija točke (x, y, z) na točko $(x^*, y^*, 0)$.

Perspektivna projekcija točke (x, y, z) na točko $(x^*, y^*, 0)$



Trikotnik v xz-ravnini na zgornji levi sliki (del (a)) je ponovno narisan na desni strani (del (b)), kjer so prikazane dolžine odsekov premic. Podobni trikotniki pokažejo, da:

$$\frac{x^*}{d} = \frac{x}{d-z} \qquad \Rightarrow \qquad x^* = \frac{d \cdot x}{d-z} = \frac{x}{1-\frac{z}{d}}.$$

Perspektivna projekcija točke (x, y, z) (nad.)

Podobno

$$y^* = \frac{y}{1 - \frac{z}{d}}.$$

Z uporabo homogenih koordinat lahko perspektivno projekcijo predstavimo z matriko, recimo P. Želimo, da se $(x, y, z, 1)$ preslika v $\left(\frac{x}{1-\frac{z}{d}}, \frac{y}{1-\frac{z}{d}}, 0, 1\right)$. S množenjem teh koordinat s $1 - z/d$ lahko uporabimo tudi $(x, y, 0, 1 - z/d)$ kot homogene koordinate za sliko. Sedaj je enostavno prikazati P. Pravzaprav:

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/d & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Primer 8

Naj bo S kvader z oglišči $(3, 1, 5)$, $(5, 1, 5)$, $(5, 0, 5)$, $(3, 0, 5)$, $(3, 1, 4)$, $(5, 1, 4)$, $(5, 0, 4)$ in $(3, 0, 4)$. Poiščite sliko S pri perspektivni projekciji s središčem projekcije v $(0, 0, 10)$.

Zaženimo naslednji program:

plot_kvader.py

Primer 8 - rešitev

Naj bo P projekcijska matrika, B pa podatkovna matrika za S v homogenih koordinatah. Podatkovna matrica za sliko S je:

$$PB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 3 & 3 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 3 & 3 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Kako zdaj pridobiti koordinate v $\mathbb{R}^3$?

Primer 8 - rešitev

Za pridobitev koordinat v $\mathbb{R}^3$ uporabite enačbe spodaj, tj., delite zgornje tri koeficijent v vsakem stolpcu z ustreznim koeficijentom v četrti vrstici:

$$x = \frac{X}{H}, \qquad y = \frac{Y}{H}, \qquad \text{in} \qquad z = \frac{Z}{H}.$$

	oglišče							
	1	2	3	4	5	6	7	8
x-koordinata	6	10	10	6	5	8.3	8.3	5
y-koordinata	2	2	0	0	1.7	1.7	0	0
z-koordinata	0	0	0	0	0	0	0	0

Zaženimo naslednji program:

plot_kvader_v2.py