Klasične zmagovalne tehnike pri miselnih igrah

Peter Muršič

UP Famnit

25. November 2020

Kombinatorične igre

Kombinatorična igra: igra med dvema igralcema (večinoma) kjer:

1. Igralca sta izmenično na potezi. Prvi zmeraj začne, drugi je naslednji na potezi. Na svoji potezi izbereta eno izmed možnih potez. Ne smeta na svoji potezi narediti nič (i.e. ne premakniti svojih figur).
2. Ni nobenih naključnih dejavnikov.
3. Stanje igre in seznam možnih potez je znan obema igralcema.
4. Igra se konča ko eden od igralcev nima več možnih potez. V večini iger je zmagovalec tisti, ki naredi zadnjo potezo (v nekaterih primerih se igra tudi lahko konča izenačeno, ali pa dobijo nagrado glede na to kako dobro so igrali)
5. Velikorat imamo tudi pogoja, da se pozicija igre ne more ponoviti, in da igra se slej ali prej konča.
6. Kombinatorično teorijo iger zanima, če oba igralca igrata optimalno, kdo zmaga?

Kombinatorične igre

Primeri kombinatoričnih iger:

1. Šah
2. Križec krožec
3. Štiri v vrsto
4. Dama
5. Go
6. Shogi (Japonski šah)
7. Nim

Kombinatorične igre

Pregled zmagovalih tehnik v predstavitvi:

- Povratna indukcija
- Zmagovalne in izgubljene pozicije
- Kraja strategije
- Eliminiranje dominiranih strategij
- Minimax algoritem

Igra: **21 zastav**

- Na kupu je 21 zastav.
- Na svoji potezi igralec iz kupa odstrani 1,2 ali 3 zastave.
- Zmaga tisti, ki izprazni kup.
- Če oba igralca igrata optimalno, a zmaga prvi ali drugi?

Igra 21 zastav je vzeta iz realističnega šova *Survivor*.

Povzetek igrane igre:

prvi	drugi

Povratna indukcija

Igra 21 zastav je vzeta iz realističnega šova *Survivor*.

Povzetek igrane igre:

prvi	drugi
21-2=19	

Povratna indukcija

Igra 21 zastav je vzeta iz realističnega šova *Survivor*.

Povzetek igrane igre:

prvi	drugi
21-2=19	19-2=17

Igra 21 zastav je vzeta iz realističnega šova *Survivor*.

Povzetek igrane igre:

prvi	drugi
21-2=19	19-2=17
17-2=15	

Povratna indukcija

Igra 21 zastav je vzeta iz realističnega šova *Survivor*.

Povzetek igrane igre:

prvi	drugi
21-2=19	19-2=17
17-2=15	15-1=14

Igra 21 zastav je vzeta iz realističnega šova *Survivor*.

Povzetek igrane igre:

prvi	drugi
21-2=19	19-2=17
17-2=15	15-1=14
14-1=13	

Povratna indukcija

Igra 21 zastav je vzeta iz realističnega šova *Survivor*.

Povzetek igrane igre:

prvi	drugi
21-2=19	19-2=17
17-2=15	15-1=14
14-1=13	13-1=12

Povratna indukcija

Igra 21 zastav je vzeta iz realističnega šova *Survivor*.

Povzetek igrane igre:

prvi	drugi
21-2=19	19-2=17
17-2=15	15-1=14
14-1=13	13-1=12
12-1=11	

Povratna indukcija

Igra 21 zastav je vzeta iz realističnega šova *Survivor*.

Povzetek igrane igre:

prvi	drugi
21-2=19	19-2=17
17-2=15	15-1=14
14-1=13	13-1=12
12-1=11	11-2=9

Povratna indukcija

Igra 21 zastav je vzeta iz realističnega šova *Survivor*.

Povzetek igrane igre:

prvi	drugi
21-2=19	19-2=17
17-2=15	15-1=14
14-1=13	13-1=12
12-1=11	11-2=9
9-3=6	6-2=4

Povratna indukcija

Igra 21 zastav je vzeta iz realističnega šova *Survivor*.

Povzetek igrane igre:

prvi	drugi
21-2=19	19-2=17
17-2=15	15-1=14
14-1=13	13-1=12
12-1=11	11-2=9
9-3=6	6-2=4
4-3=1	

Povratna indukcija

Igra 21 zastav je vzeta iz realističnega šova *Survivor*.

Povzetek igrane igre:

prvi	drugi
21-2=19	19-2=17
17-2=15	15-1=14
14-1=13	13-1=12
12-1=11	11-2=9
9-3=6	6-2=4
4-3=1	1-1=0

Povratna indukcija

Igra 21 zastav je vzeta iz realističnega šova *Survivor*.

Povzetek igrane igre:

prvi	drugi
21-2=19	19-2=17
17-2=15	15-1=14
14-1=13	13-1=12
12-1=11	11-2=9
9-3=6	6-2=4
4-3=1	1-1=0

drugi zmaga!

Povratna indukcija: je proces razmišljanja naprej v času, od konca problema nazaj do začetka, kjer sproti odkrivamo optimalne poteze.

V tem primeru se igra konča z 0 zastavami. Igralec, ki začne s tako pozicijo avtomatsko izgubi. Poglejmo kaj se zgodi če imamo 1,2,...,21 zastav, v tem vrstnem redu, in ugotovimo ali igralec ki začne v tej potezi zmaga ali izgubi.

- $0 \rightarrow$ izgubi

Povratna indukcija

Povratna indukcija: je proces razmišljanja naprej v času, od konca problema nazaj do začetka, kjer sproti odkrivamo optimalne poteze.

V tem primeru se igra konča z 0 zastavami. Igralec, ki začne s tako pozicijo avtomatsko izgubi. Poglejmo kaj se zgodi če imamo 1,2,...,21 zastav, v tem vrstnem redu, in ugotovimo ali igralec ki začne v tej potezi zmaga ali izgubi.

- $0 \rightarrow$ izgubi
- $1 \rightarrow$ zmaga

Povratna indukcija

Povratna indukcija: je proces razmišljanja naprej v času, od konca problema nazaj do začetka, kjer sproti odkrivamo optimalne poteze.

V tem primeru se igra konča z 0 zastavami. Igralec, ki začne s tako pozicijo avtomatsko izgubi. Poglejmo kaj se zgodi če imamo 1,2,...,21 zastav, v tem vrstnem redu, in ugotovimo ali igralec ki začne v tej potezi zmaga ali izgubi.

- $0 \rightarrow$ izgubi
- $1 \rightarrow$ zmaga
- $2 \rightarrow$ zmaga

Povratna indukcija

Povratna indukcija: je proces razmišljanja naprej v času, od konca problema nazaj do začetka, kjer sproti odkrivamo optimalne poteze.

V tem primeru se igra konča z 0 zastavami. Igralec, ki začne s tako pozicijo avtomatsko izgubi. Poglejmo kaj se zgodi če imamo 1,2,...,21 zastav, v tem vrstnem redu, in ugotovimo ali igralec ki začne v tej potezi zmaga ali izgubi.

- $0 \rightarrow$ izgubi
- $1 \rightarrow$ zmaga
- $2 \rightarrow$ zmaga
- $3 \rightarrow$ zmaga

Povratna indukcija

Povratna indukcija: je proces razmišljanja naprej v času, od konca problema nazaj do začetka, kjer sproti odkrivamo optimalne poteze.

V tem primeru se igra konča z 0 zastavami. Igralec, ki začne s tako pozicijo avtomatsko izgubi. Poglejmo kaj se zgodi če imamo 1,2,...,21 zastav, v tem vrstnem redu, in ugotovimo ali igralec ki začne v tej potezi zmaga ali izgubi.

- $0 \rightarrow$ izgubi
- $1 \rightarrow$ zmaga
- $2 \rightarrow$ zmaga
- $3 \rightarrow$ zmaga
- $4 \rightarrow$ izgubi

Povratna indukcija

Povratna indukcija: je proces razmišljanja naprej v času, od konca problema nazaj do začetka, kjer sproti odkrivamo optimalne poteze.

V tem primeru se igra konča z 0 zastavami. Igralec, ki začne s tako pozicijo avtomatsko izgubi. Poglejmo kaj se zgodi če imamo 1,2,...,21 zastav, v tem vrstnem redu, in ugotovimo ali igralec ki začne v tej potezi zmaga ali izgubi.

- $0 \rightarrow$ izgubi
- $1 \rightarrow$ zmaga
- $2 \rightarrow$ zmaga
- $3 \rightarrow$ zmaga
- $4 \rightarrow$ izgubi
- $5 \rightarrow$ zmaga

Povratna indukcija

Povratna indukcija: je proces razmišljanja naprej v času, od konca problema nazaj do začetka, kjer sproti odkrivamo optimalne poteze.

V tem primeru se igra konča z 0 zastavami. Igralec, ki začne s tako pozicijo avtomatsko izgubi. Poglejmo kaj se zgodi če imamo 1,2,...,21 zastav, v tem vrstnem redu, in ugotovimo ali igralec ki začne v tej potezi zmaga ali izgubi.

- $0 \rightarrow$ izgubi
- $1 \rightarrow$ zmaga
- $2 \rightarrow$ zmaga
- $3 \rightarrow$ zmaga
- $4 \rightarrow$ izgubi
- $5 \rightarrow$ zmaga
- $6 \rightarrow$ zmaga

Povratna indukcija

Povratna indukcija: je proces razmišljanja naprej v času, od konca problema nazaj do začetka, kjer sproti odkrivamo optimalne poteze.

V tem primeru se igra konča z 0 zastavami. Igralec, ki začne s tako pozicijo avtomatsko izgubi. Poglejmo kaj se zgodi če imamo 1,2,...,21 zastav, v tem vrstnem redu, in ugotovimo ali igralec ki začne v tej potezi zmaga ali izgubi.

- 0 $\rightarrow$ izgubi
- 1 $\rightarrow$ zmaga
- 2 $\rightarrow$ zmaga
- 3 $\rightarrow$ zmaga
- 4 $\rightarrow$ izgubi
- 5 $\rightarrow$ zmaga
- 6 $\rightarrow$ zmaga
- 7 $\rightarrow$ zmaga

Povratna indukcija

Povratna indukcija: je proces razmišljanja naprej v času, od konca problema nazaj do začetka, kjer sproti odkrivamo optimalne poteze.

V tem primeru se igra konča z 0 zastavami. Igralec, ki začne s tako pozicijo avtomatsko izgubi. Poglejmo kaj se zgodi če imamo 1,2,...,21 zastav, v tem vrstnem redu, in ugotovimo ali igralec ki začne v tej potezi zmaga ali izgubi.

- 0 $\rightarrow$ izgubi
- 1 $\rightarrow$ zmaga
- 2 $\rightarrow$ zmaga
- 3 $\rightarrow$ zmaga
- 4 $\rightarrow$ izgubi
- 5 $\rightarrow$ zmaga
- 6 $\rightarrow$ zmaga
- 7 $\rightarrow$ zmaga
- 8 $\rightarrow$ izgubi

Povratna indukcija

Povratna indukcija: je proces razmišljanja naprej v času, od konca problema nazaj do začetka, kjer sproti odkrivamo optimalne poteze.

V tem primeru se igra konča z 0 zastavami. Igralec, ki začne s tako pozicijo avtomatsko izgubi. Poglejmo kaj se zgodi če imamo 1,2,...,21 zastav, v tem vrstnem redu, in ugotovimo ali igralec ki začne v tej potezi zmaga ali izgubi.

- $0 \rightarrow$ izgubi
- $1 \rightarrow$ zmaga
- $2 \rightarrow$ zmaga
- $3 \rightarrow$ zmaga
- $4 \rightarrow$ izgubi
- $5 \rightarrow$ zmaga
- $6 \rightarrow$ zmaga
- $7 \rightarrow$ zmaga
- $8 \rightarrow$ izgubi
- ...

Povratna indukcija

Domneva

Če je število zastav n deljivo s štiri, prvi izgubi, čene pa zmaga.

Dokaz z indukcijo:

1. Za $n = 0$, velja $4 \mid 0$ in prvi izgubi.
2. Predpostavimo da indukcijska predpostavka velja za $0, \ldots, n-1$ in pokažimo da velja za n.
   1. Če $4 \nmid n$, potem prvi lahko odstrani 1, 2 ali 3 zastave, tako da je rezultat deljiv z 4. Po indukcijski predpostavki v taki potezi drugi izgubi. Torej v tem primeru prvi zmaga.
   2. Če $4 \mid n$, potem ne glede na to ali prvi odstrani 1,2 ali 3 zastave, nebo v nobenem primeru rezultat deljiv s 4. Po indukcijski predpostavki v vseh treh primerih drugi zmaga. Katrekoli potezo naredimo, bo drugi v nadaljeval v zmagovalni poziciji. Torej prvi izgubi.

Zmagovalne in izgubljene pozicije

Nepristranske igre: Oba igralca imata na volje enake poteze, igra je končna in kdor odigra zadnjo potezo zmaga, izenačenje ni možno.

Igre kot so šah in križec krožec so pristranske (partizanske), saj igralci lahko igrajo samo s svojimi figurami.

Pri nepristranskih igrah in optimalnimi igralci je zmagovalec določen s tem ko določimo kdo gre prvi.

Zmagovalna pozicija je pozicija igre v kateri igralec na potezi lahko zmaga neglede na to kako igra nasprotnik.

Izgubljena pozicija je pozicija igre v kateri igralec, ki ni na potezi lahko zmaga neglede na to kako igra igralec na potezi.

Zmagovalne in izgubljene pozicije

Zmagovalno/izgubljena particija: Je particija vseh možnih pozicij na zmagovalne in izgubljene pozicije. Particijo se lahko dobi iterativno:

- Pozicije brez potez (**terminalne pozicije**) so izgubljene pozicije.
- Pozicije, ki imajo potezo s katero se premaknemo v izgubljene so zmagovalne.
- Pozicije, nimajo poteze s katero se premaknemo v izgubljeno pozicijo so izgubljene.

Zmagovalne in izgubljene pozicije

Primer zmagovalno/izgubljene particije na igri 21 zastav:

- 0$\rightarrow$izgubljena pozicija

Zmagovalne in izgubljene pozicije

Primer zmagovalno/izgubljene particije na igri 21 zastav:

- 0$\rightarrow$izgubljena pozicija
- 1,2,3$\rightarrow$zmagovalne pozicije, saj vseh treh imamo potezo do 0, ki je izgubljena.

Zmagovalne in izgubljene pozicije

Primer zmagovalno/izgubljene particije na igri 21 zastav:

- 0$\rightarrow$izgubljena pozicija
- 1,2,3$\rightarrow$zmagovalne pozicije, saj vseh treh imamo potezo do 0, ki je izgubljena.
- 4$\rightarrow$izgubljena pozicija, saj se lahko premaknemo samo v zmagovalne pozicije 1,2,3.

Zmagovalne in izgubljene pozicije

Primer zmagovalno/izgubljene particije na igri 21 zastav:

- 0$\rightarrow$izgubljena pozicija
- 1,2,3$\rightarrow$zmagovalne pozicije, saj vseh treh imamo potezo do 0, ki je izgubljena.
- 4$\rightarrow$izgubljena pozicija, saj se lahko premaknemo samo v zmagovalne pozicije 1,2,3.
- 5,6,7$\rightarrow$zmagovalne pozicije, saj vseh treh imamo potezo do 4, ki je izgubljena

Zmagovalne in izgubljene pozicije

Primer zmagovalno/izgubljene particije na igri 21 zastav:

- 0$\rightarrow$izgubljena pozicija
- 1,2,3$\rightarrow$zmagovalne pozicije, saj vseh treh imamo potezo do 0, ki je izgubljena.
- 4$\rightarrow$izgubljena pozicija, saj se lahko premaknemo samo v zmagovalne pozicije 1,2,3.
- 5,6,7$\rightarrow$zmagovalne pozicije, saj vseh treh imamo potezo do 4, ki je izgubljena
- 8$\rightarrow$izgubljena pozicija, saj se lahko premaknemo samo v zmagovalne pozicije 5,6,7.

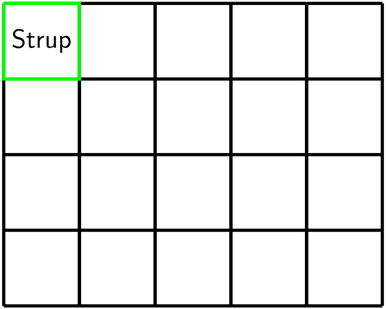
Kraja strategije

Igra: **Chomp**

- Imamo tablico čokolade velikosti $m \times n$ kjer sta $m, n \in \mathbb{N}$.
- Čokolada je razrezana na $m \times n$ polj (kot šahovnica).
- Na svoji potezi igralec izbere eno izmed preostalih polj in jo odgrizne skupaj v vsemi polji pod njim, desno in tistimi, ki so tako desno in pod njim.
- Polje čokolade v levem zgornjem kotu je zastrupljeno. Tisti, ki vanj uzgrizne izgubi (misère).
- A zmaga prvi ali drugi?

Kraja strategije

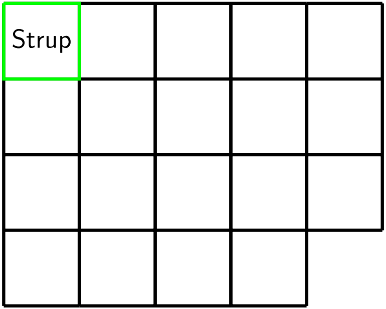
Igra: **Chomp**



prvi na potezi

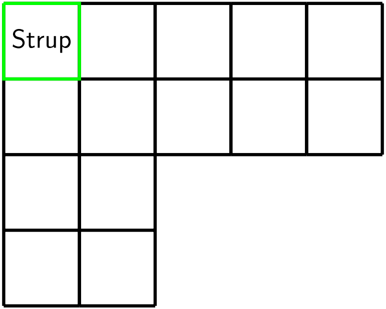
Kraja strategije

Igra: **Chomp**



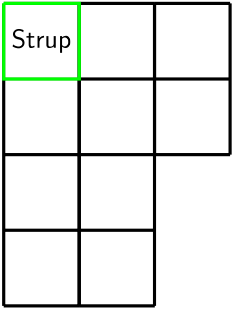
drugi na potezi

Igra: **Chomp**



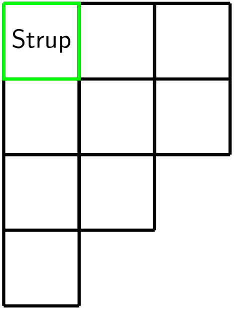
prvi na potezi

Igra: **Chomp**



drugi na potezi

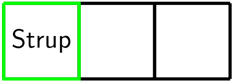
Igra: **Chomp**



prvi na potezi

Kraja strategije

Igra: **Chomp**



drugi na potezi

Kraja strategije

Igra: **Chomp**

Strup

prvi na potezi in ker mora ugriniti v preostali zastrupljen kos, izgubi.

Kraja strategije

Izrek

Razen za velikost čokolade 1×1, *prvi lahko vedno zmaga.*

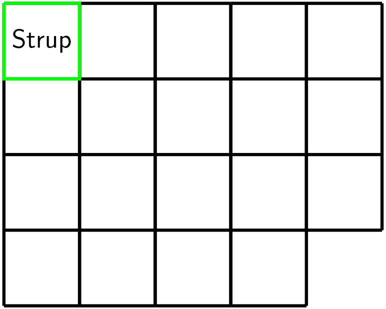
Dokaz:

Kraja strategije

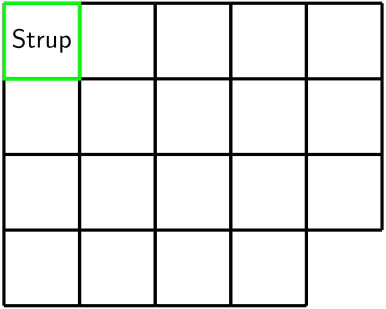
Izrek

Razen za velikost čokolade 1×1, prvi lahko vedno zmaga.

Dokaz: Za 1×1 prvi očitno izgubi.
Za $m \times n$ kjer $mn > 1$, pokažimo da prvi ima zmagovalno potezo. Poglejmo si potezo, kjer prvi odgrizne 1×1 polje v desnem spodnjem kotu. Če je to zmagovalna poteza, je izrek pokazan.

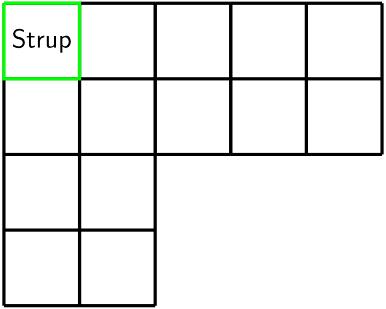


Če to ni zmagovalna poteza, potem ker je velikost tablice čokolade več kot 1×1 bo zagotovo za prvim igral drugi. Drugi mora imeti v odgovor zmagovalno potezo. Kakorkoli ta poteza zgleda, bi ta poteza hkrati tudi odgriznila desni spodnji kot (če bi še vedno tam bil), kar pomeni da bi to isto zmagovalno potezo lahko naredil prvi na svoji prvi potezi, torej ukradel strategijo. $\square$



Kraja strategije

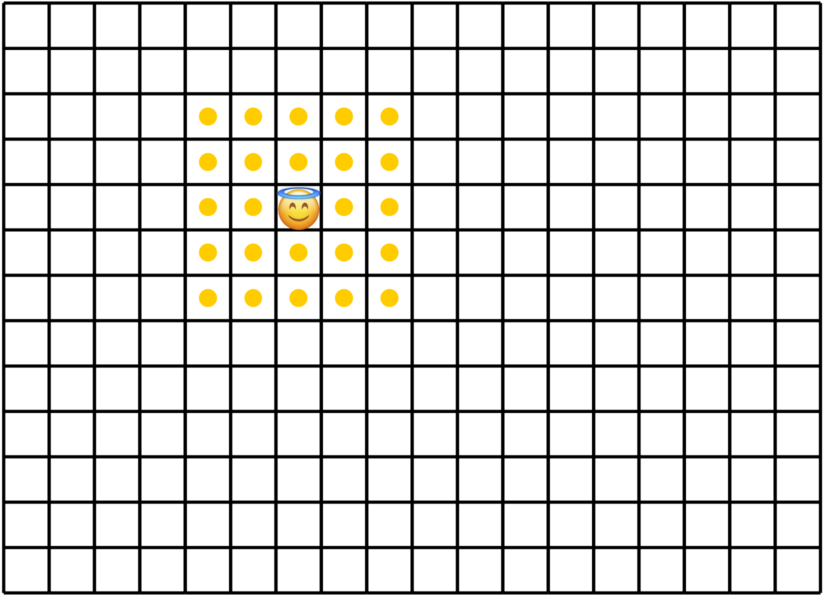
Če to ni zmagovalna poteza, potem ker je velikost tablice čokolade več kot 1×1 bo zagotovo za prvim igral drugi. Drugi mora imeti v odgovor zmagovalno potezo. Kakorkoli ta poteza zgleda, bi ta poteza hkrati tudi odgriznila desni spodnji kot (če bi še vedno tam bil), kar pomeni da bi to isto zmagovalno potezo lahko naredil prvi na svoji prvi potezi, torej ukradel strategijo. □



Igra: **Angel in hudič**

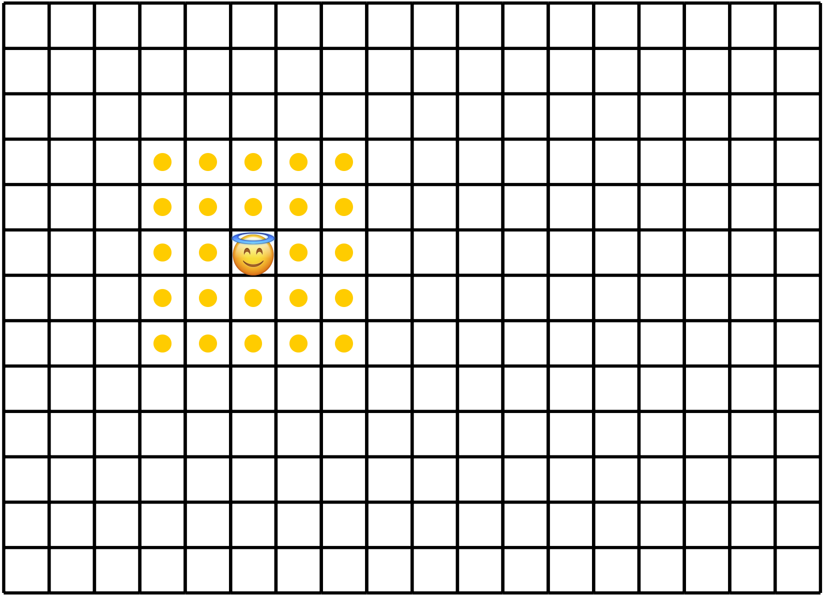
- Igra se na neskončni šahovnici. Angel začne.
- Angel je kot figura v začetku postavljen na neko polje na šahovnici. Na svoji potezi se premakne na katerokoli drugo polje znoraj $2n + 1 \times 2n + 1$ škatle s središčem v trenutnem polju.
- Hudič lahko eno katerkoli polje na šahovnici odstrani. Na polja, ki jih hudič ostrani se angel ne more premakniti.
- Hudič želi angela spraviti v situacijo, ko je obkoljen z izključno odstranjenimi polji. Ker potem angel ne more narediti legalne poteze, izgubi. A lahko angel neskočno beži hudiču (v tem primeru angel zmaga) ali ga bo hudič slejkoprej ujel?

Odstranjevanje dominiranih strategij



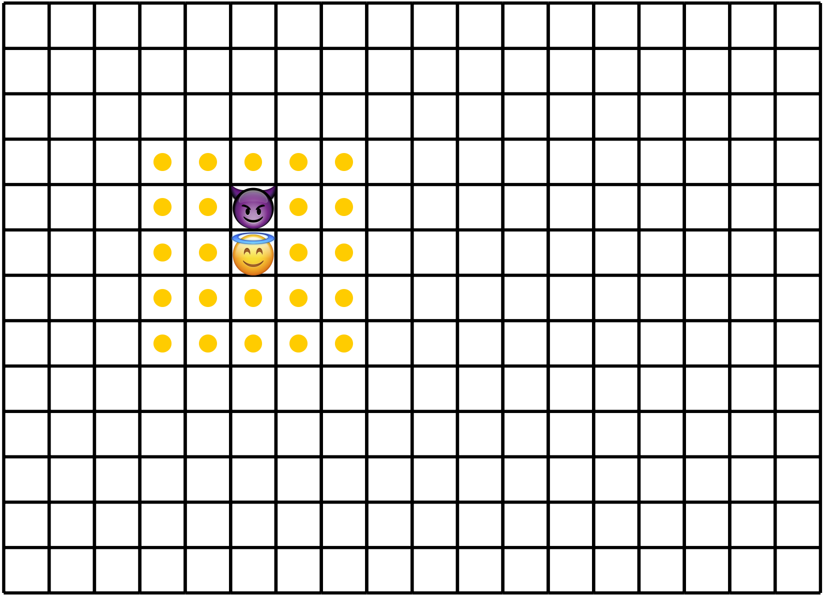
 na potezi

Odstranjevanje dominiranih strategij



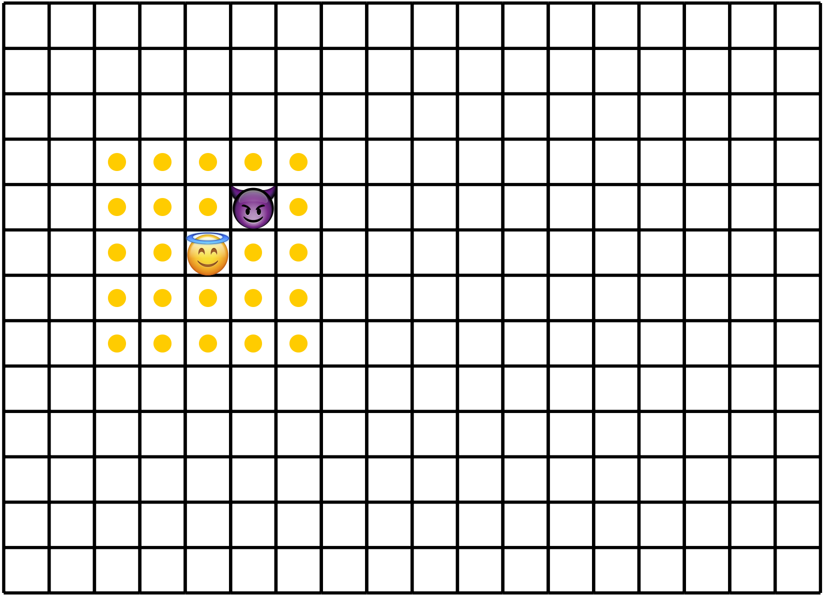
😈 na potezi

Odstranjevanje dominiranih strategij



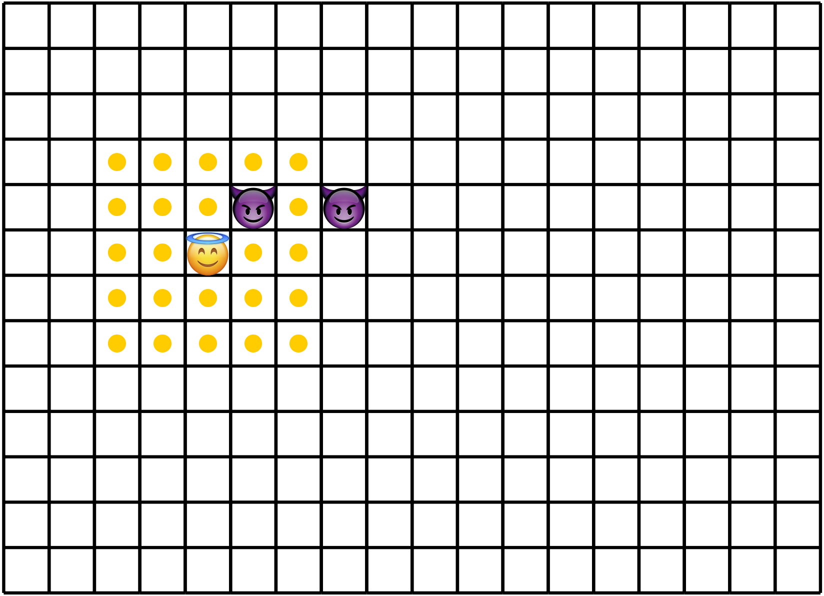
 na potezi

Odstranjevanje dominiranih strategij



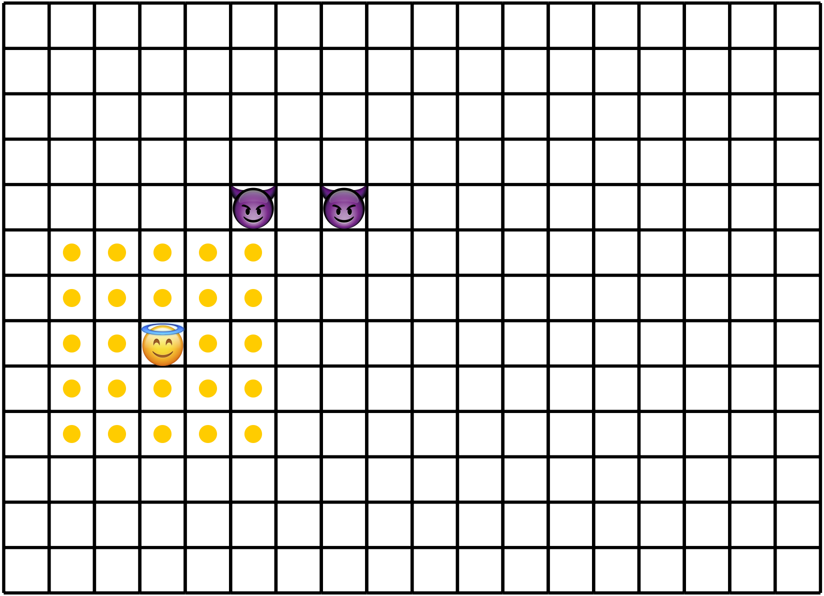
😈 na potezi

Odstranjevanje dominiranih strategij



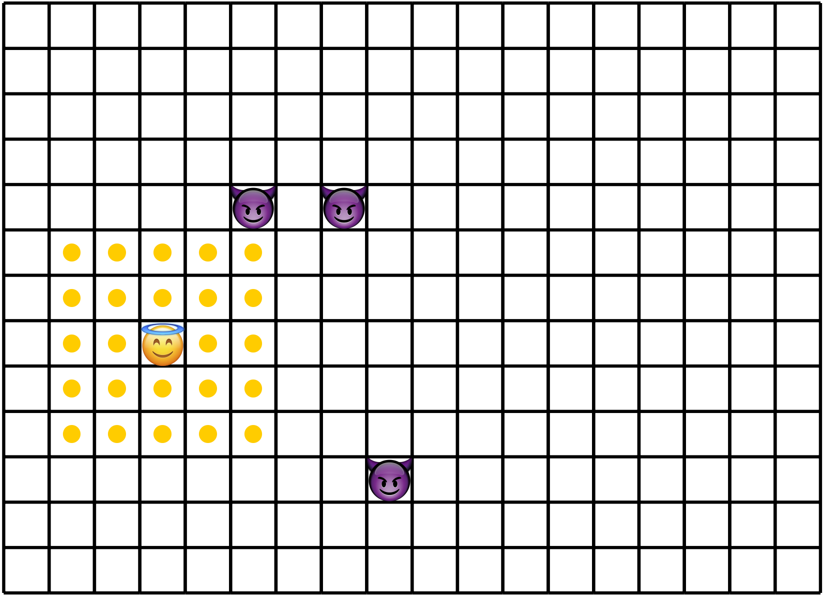
 na potezi

Odstranjevanje dominiranih strategij



😈 na potezi

Odstranjevanje dominiranih strategij



na potezi

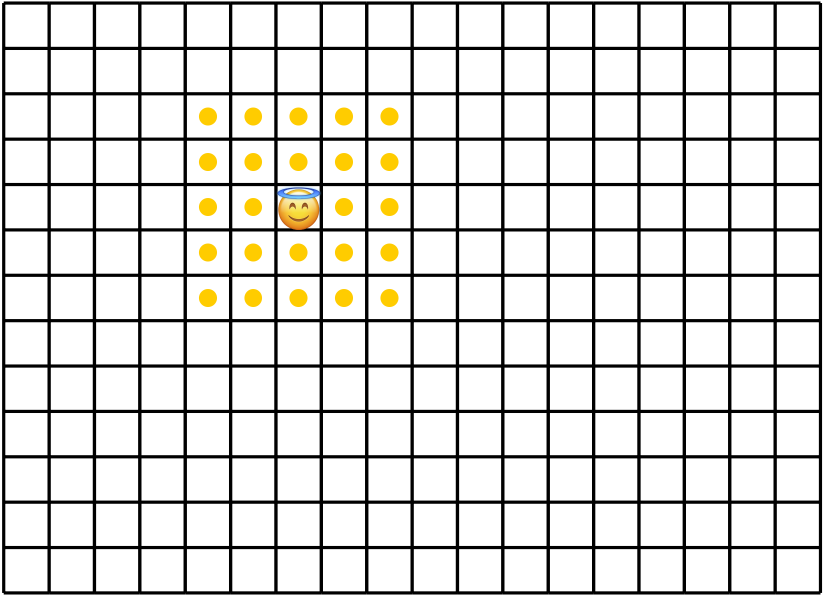
Odstranjevanje dominiranih strategij

Strategija: nabor potez, ki jih igralec izbere v igri.

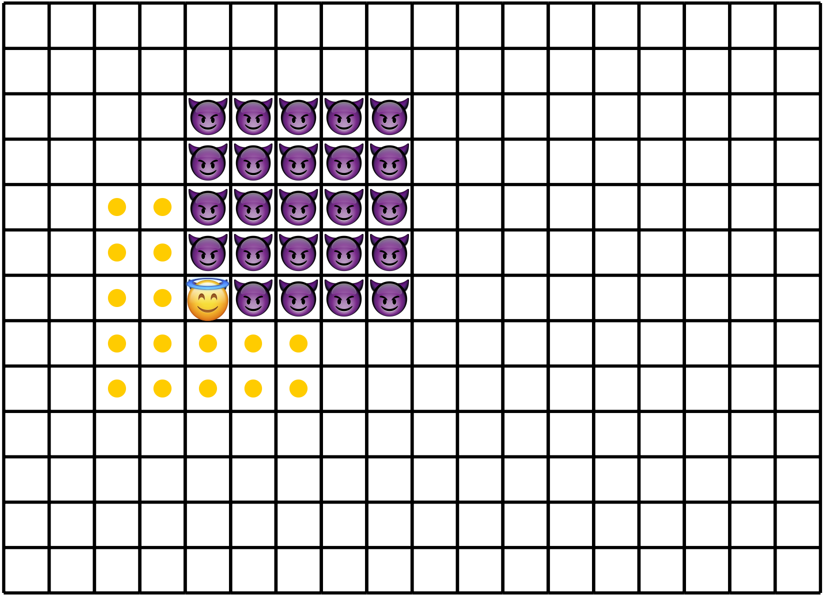
Strategija A **šibko dominira** B, če igralec izbere A namesto B pride do vsaj tako dobrega rezultata kot pri B, ne glede kako igra nasprotnik.

Če zmagovalna strategija obstaja, zagotovo obstaja takšna, ki ne vključuje šibko dominirane strategije.

Odstranjevanje dominiranih strategij



 na potezi



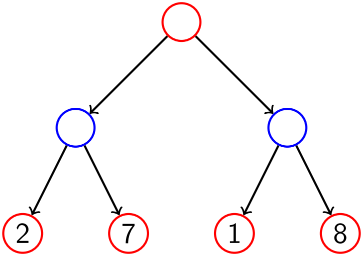
😈 na potezi

Vrniti se na polje, ki smo ga lahko dosegli v preteklosti je dominirana strategija.

Zaključek: Če angel želi zbežati hudiču potem se noče nikoli vrniti na polje, ki ga je lahko dosegel prej, saj to je dominirana strategija.

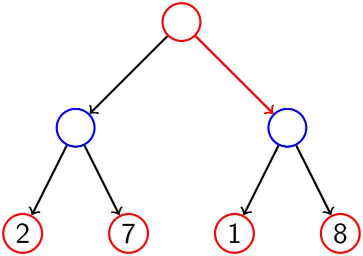
Minimax algoritem

Igra z vsoto nič: Posplošimo igre kjer lahko samo zmagamo ali izgubimo in si poglejmo igre, kjer je rezultat igre izkupiček $r \in \mathbb{R}$. Prvi maksimizira r, drugi minimizira r.

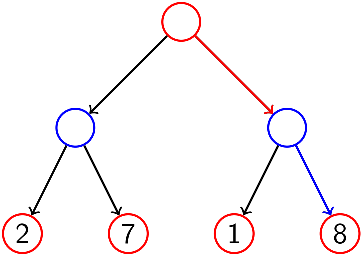


Minimax algoritem

Igra z vsoto nič: Posplošimo igre kjer lahko samo zmagamo ali izgubimo in si poglejmo igre, kjer je rezultat igre izkupiček $r \in \mathbb{R}$. Prvi maximizira r, drugi minimizira r.



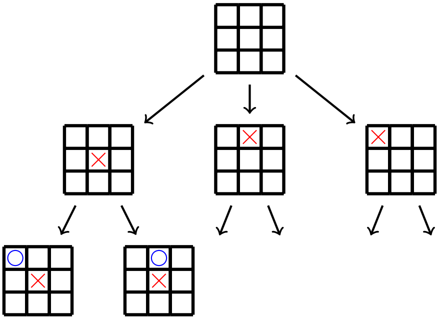
Igra z vsoto nič: Posplošimo igre kjer lahko samo zmagamo ali izgubimo in si poglejmo igre, kjer je rezultat igre izkupiček $r \in \mathbb{R}$. Prvi maksimizira r, drugi minimizira r.



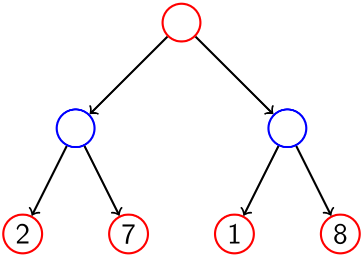
Igra se konča, in rezultat igre je $r = 8$.

Minimax algoritem

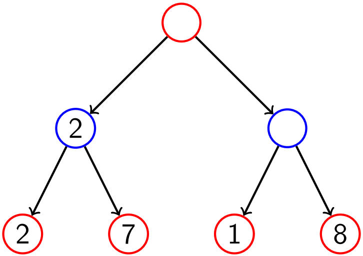
Igralno drevo: Vsako končno kombinatorično igro si lahko predstavljamo kot drevo katere koren je začetna pozicija. Vsaka pozicija je povezana s pozicijami, ki jih lahko dosežemo z eno potezo.



Minimax algoritem: v igralnem drevesu od spodaj navzgor dodelimo vrednosti pozicijam. Če igra prvi potem vzame maximum, če igra drugi vzame minimum.

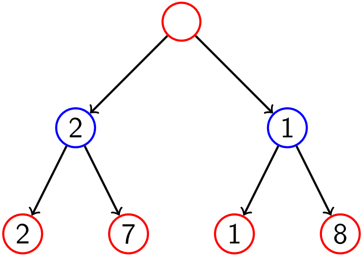


Minimax algoritem: v igralnem drevesu od spodaj navzgor dodelimo vrednosti pozicijam. Če igra prvi potem vzame maximum, če igra drugi vzame minimum.



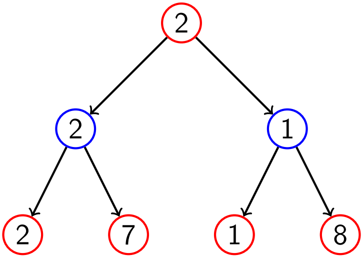
Minimax algoritem

Minimax algoritem: v igralnem drevesu od spodaj navzgor dodelimo vrednosti pozicijam. Če igra prvi potem vzame maximum, če igra drugi vzame minimum.



Igra se konča, in rezultat igre je $r = 2$. To pomeni da prvi lahko dobi vsaj 2, drugi 2 ali manj.

Minimax algoritem: v igralnem drevesu od spodaj navzgor dodelimo vrednosti pozicijam. Če igra prvi potem vzame maximum, če igra drugi vzame minimum.



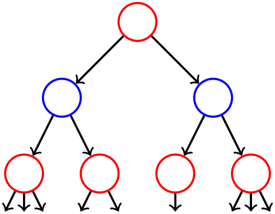
Igra se konča, in rezultat igre je $r = 2$. To pomeni da prvi lahko dobi vsaj 2, drugi 2 ali manj.

Minimax algoritem

Igralno drevo za šah je ogromno: 10^{120} pozicij.

Nikoli nebo obstajal računalnik, ki lahko natančno izračuna igralno drevo za šah.

Deep blue (računalniški program za igranje šaha) ideja: naredimo igralno drevo samo za približno 10 potez v naprej in ocenimo vsako pozicijo z neko vrednostjo, nato rešimo z minimax algoritmom.



Minimax algoritem

Kako oceniti vrednost pozicije šaha?

Vsaka figura ima ocenjeno vrednost:

- 1 kmet
- 3 skakač (konj)
- 3 tekač
- 5 trdnjava
- 9 kraljica,
- 100 kralj.

Ocena pozicije $=$ vsota belih figur$-$vsota črnih figur

Sodobni algoritmi za igranje šaha (Alphago) so precej boljši in se poslužujejo strojnega učenja.

Kako oceniti vrednost pozicije šaha?

Vsaka figura ima ocenjeno vrednost:

- 1 kmet
- 3 skakač (konj)
- 3 tekač
- 5 trdnjava
- 9 kraljica,
- 100 kralj.

Ocena pozicije $=$ vsota belih figur$-$vsota črnih figur

Sodobni algoritmi za igranje šaha (Alphago) so precej boljši in se poslužujejo strojnega učenja.

Hvala za pozornost!