
Možganska omrežja: matematični pogled na delovanje možganov

Rok Požar

Univerza na Primorskem
Fakulteta za matematiko, naravoslovje
in informacijske tehnologije

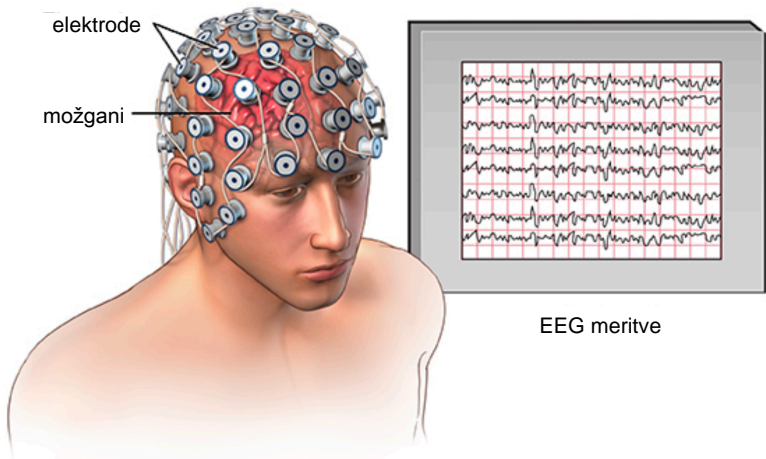
Famnitovi izleti v matematično veselje

Marec 2021

Merjenje možganske aktivnosti

Elektroencefalografija (EEG)

metoda meritev električnih signalov z elektrodami na površini glave



Zakaj teorija grafov?

Zgodovinski vidik

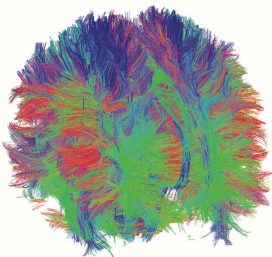
Lokalizirano dožemanje možganskih funkcij

vsaka možganska funkcija svoje anatomsko definirano središče

Današnji vidik

Možgani kot kompleksna celota

lastnosti, ki niso niti popolnoma naključne niti popolnoma regularne, ampak odražajo značilnosti bolj kompleksne organizacije



Isenberg, 2015

Zakaj teorija grafov?

Zgodovinski vidik

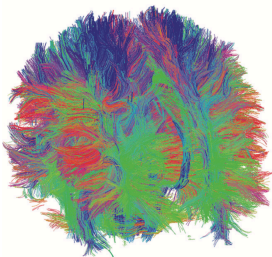
Lokalizirano dožemanje možganskih funkcij

vsaka možganska funkcija svoje anatomsko definirano središče

Današnji vidik

Možgani kot kompleksna celota

lastnosti, ki niso niti popolnoma naključne niti popolnoma regularne, ampak odražajo značilnosti bolj kompleksne organizacije



Isenberg, 2015

Grafi so dovolj robustni, da zajamejo bistvene lastnosti kompleksnih omrežji, a dovolj preprosti za globoko matematično razumevanje.

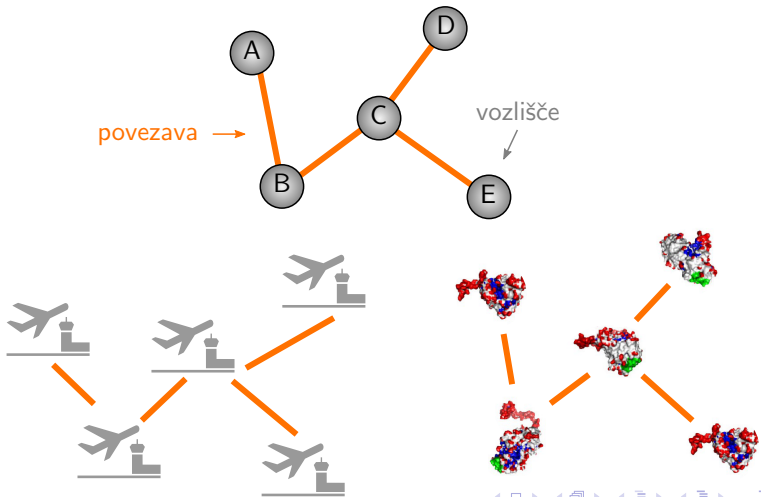
Omrežja in grafi

Omrežje matematično predstavimo z grafom

Graf sestoji iz vozlišč in povezav med njimi

vozlišča predstavljajo osnovne gradnike sistema

povezave predstavljajo odnose med gradniki



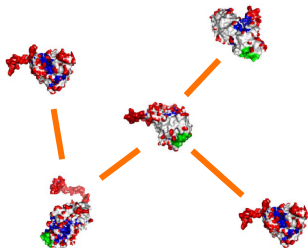
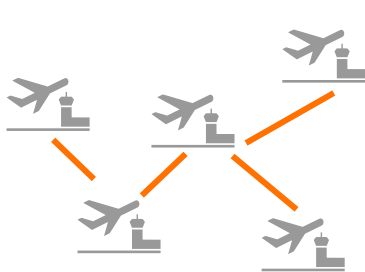
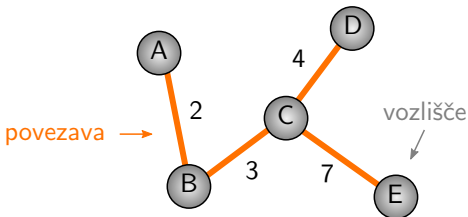
Omrežja in grafi

Omrežje matematično predstavimo z grafom

Graf sestoji iz vozlišč in povezav med njimi

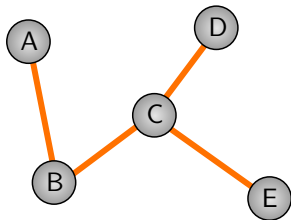
vozlišča predstavljajo osnovne gradnike sistema

povezave predstavljajo odnose med gradniki

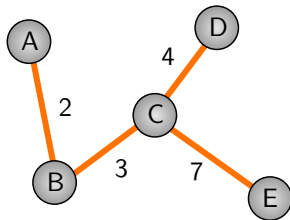


Matrika in grafi

Graf učinkovito predstavimo z matriko sosednosti



	A	B	C	D	E
A		1			
B	1		1		
C		1		1	1
D			1		
E			1		

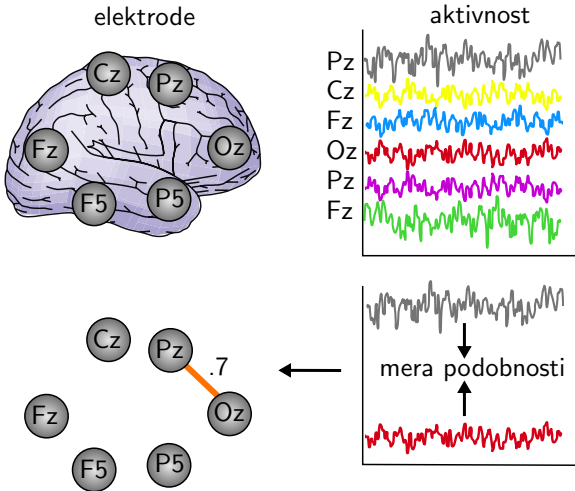


	A	B	C	D	E
A		2			
B	2		3		
C		3		4	7
D			4		
E			7		

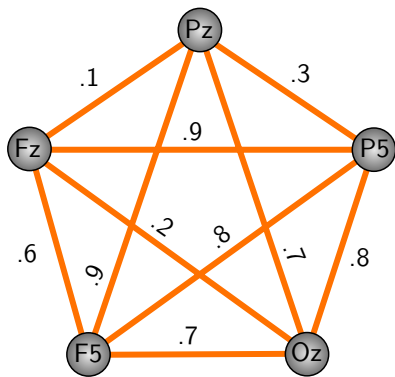
Gradnja možganskega grafa

Vozlišče: elektroda

Utežena povezava: statistična odvisnost med izmerjenima signaloma

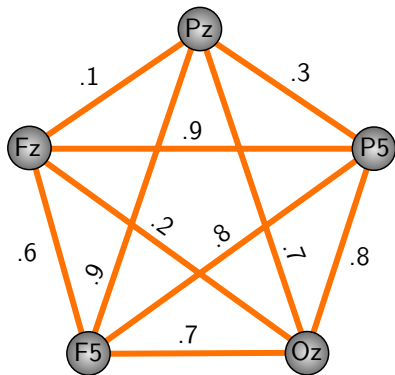


Funkcionalna povezanost



	Pz	P5	Oz	F5	Fz
Pz	■	.3	.7	.9	.1
P5	.3	■	.8	.8	.9
Oz	.7	.8	■	.7	.2
F5	.9	.8	.7	■	.6
Fz	.1	.9	.2	.6	■

Funkcionalna povezanost

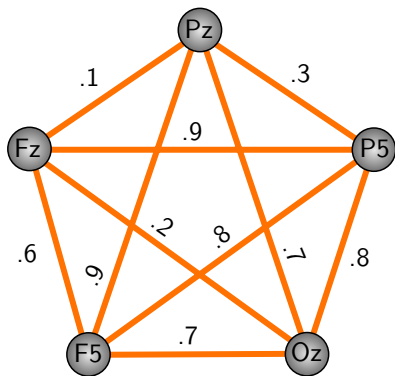


	Pz	P5	Oz	F5	Fz
Pz	0	.3	.7	.9	.1
P5	.3	0	.8	.8	.9
Oz	.7	.8	0	.7	.2
F5	.9	.8	.7	0	.6
Fz	.1	.9	.2	.6	0

Globalna analiza

Povprečna globalna funkcionalna povezanost
povprečje izven diagonalnih vrednosti v matriki

Funkcionalna povezanost



	Pz	P5	Oz	F5	Fz
Pz		.3	.7	.9	.1
P5	.3		.8	.8	.9
Oz	.7	.8		.7	.2
F5	.9	.8	.7		.6
Fz	.1	.9	.2	.6	

Globalna analiza

Povprečna globalna funkcionalna povezanost

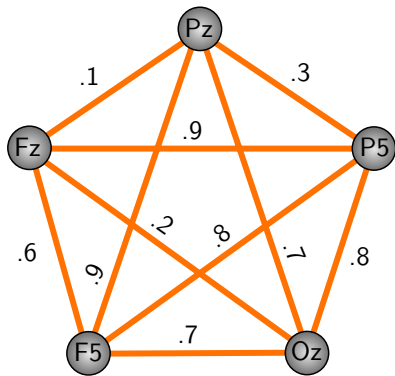
povprečje izven diagonalnih vrednosti v matriki

Lokalna analiza

Povprečna funkcionalna povezanost vozlišča

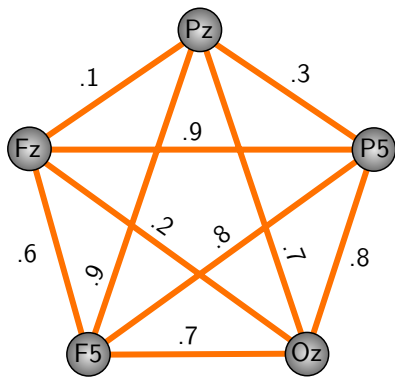
povprečje izven diagonalnih vrednosti v pripadajoči vrstici v matriki

Katere povezave so realne?



	Pz	P5	Oz	F5	Fz
Pz	■	.3	.7	.9	.1
P5	.3	■	.8	.8	.9
Oz	.7	.8	■	.7	.2
F5	.9	.8	.7	■	.6
Fz	.1	.9	.2	.6	■

Katere povezave so realne?



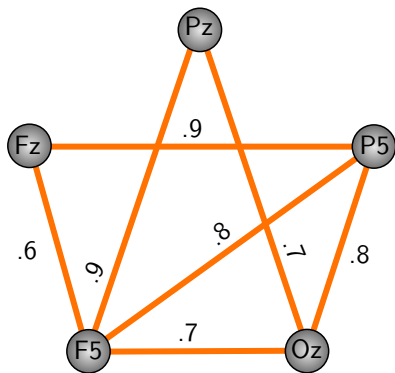
	Pz	P5	Oz	F5	Fz
Pz		.3	.7	.9	.1
P5	.3		.8	.8	.9
Oz	.7	.8		.7	.2
F5	.9	.8	.7		.6
Fz	.1	.9	.2	.6	

Povezave z nizkimi utežmi lahko predstavljajo šum

Uporaba mejne vrednosti – praga

odstranitev povezav, katerih uteži so pod izbranim pragom

Katere povezave so realne?



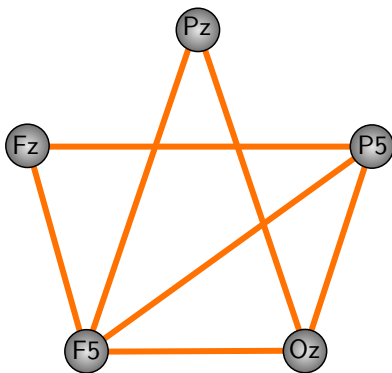
	Pz	P5	Oz	F5	Fz
Pz			.7	.9	
P5			.8	.8	.9
Oz	.7	.8		.7	
F5	.9	.8	.7		.6
Fz		.9		.6	

Povezave z nizkimi utežmi lahko predstavljajo šum

Uporaba mejne vrednosti – praga

odstranitev povezav, katerih uteži so pod izbranim pragom

Katere povezave so realne?



	Pz	P5	Oz	F5	Fz
Pz	■	■	1	1	■
P5	■	■	1	1	1
Oz	1	1	■	1	■
F5	1	1	1	■	1
Fz	■	1	■	1	■

Povezave z nizkimi utežmi lahko predstavljajo šum

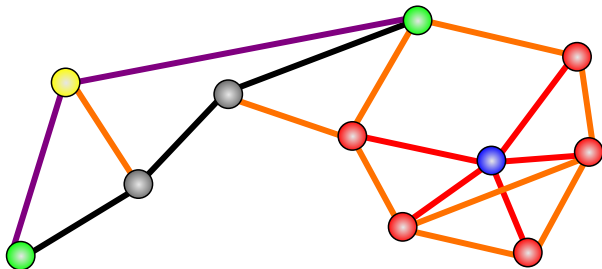
Uporaba mejne vrednosti – praga

odstranitev povezav, katerih uteži so pod izbranim pragom

Po uporabi praga pozabimo uteži in analiziramo neutežen graf!

Osnovni pojmi

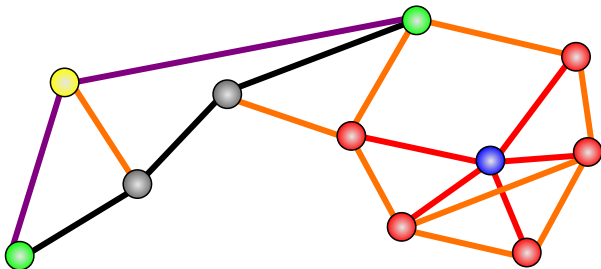
Vozlišči sta **sosednji**, če obstaja povezava med njima.



Osnovni pojmi

Vozlišči sta **soseдни**, če obstaja povezava med njima.

Pot je zaporedje različnih vozlišč, kjer sta zaporedni vozlišči soseдни.

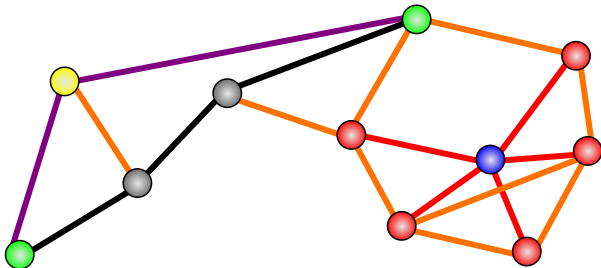


Osnovni pojmi

Vozlišči sta **soseдни**, če obstaja povezava med njima.

Pot je zaporedje različnih vozlišč, kjer sta zaporedni vozlišči soseдни.

Dolžina poti je število vozlišč na poti.



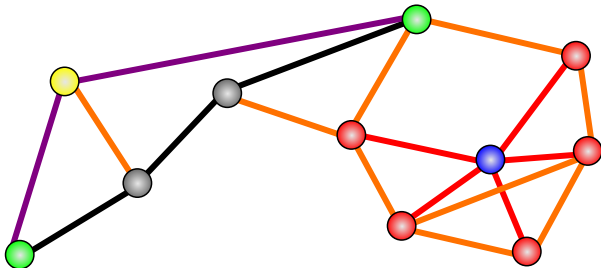
Osnovni pojmi

Vozlišči sta **soseдни**, če obstaja povezava med njima.

Pot je zaporedje različnih vozlišč, kjer sta zaporedni vozlišči soseдни.

Dolžina poti je število vozlišč na poti.

Najkrajša pot med vozliščema je pot z najkrajšo dolžino.



Osnovni pojmi

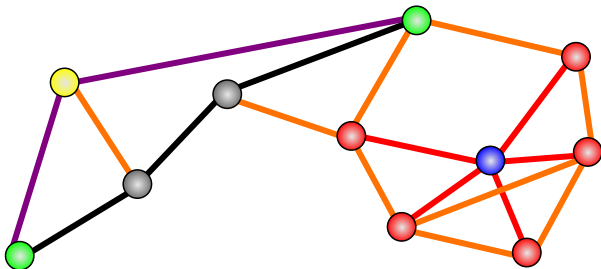
Vozlišči sta **sosednji**, če obstaja povezava med njima.

Pot je zaporedje različnih vozlišč, kjer sta zaporedni vozlišči sosednji.

Dolžina poti je število vozlišč na poti.

Najkrajša pot med vozliščema je pot z najkrajšo dolžino.

Cikel je pot, ki se začne in konča v istem vozlišču.



Osnovni pojmi

Vozlišči sta **soseдни**, če obstaja povezava med njima.

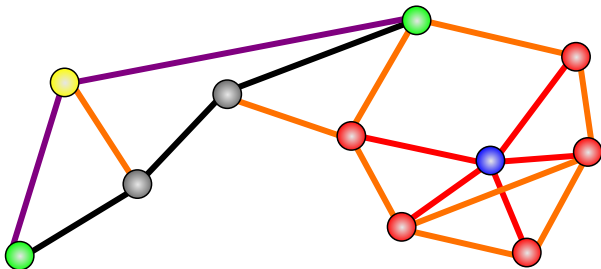
Pot je zaporedje različnih vozlišč, kjer sta zaporedni vozlišči soseдни.

Dolžina poti je število vozlišč na poti.

Najkrajša pot med vozliščema je pot z najkrajšo dolžino.

Cikel je pot, ki se začne in konča v istem vozlišču.

Graf je **povezan**, če za vsak par različnih vozlišč obstaja pot med njima.



Osnovni pojmi

Vozlišči sta **sosednji**, če obstaja povezava med njima.

Pot je zaporedje različnih vozlišč, kjer sta zaporedni vozlišči sosednji.

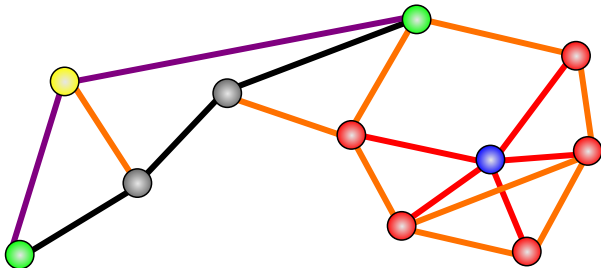
Dolžina poti je število vozlišč na poti.

Najkrajša pot med vozliščema je pot z najkrajšo dolžino.

Cikel je pot, ki se začne in konča v istem vozlišču.

Graf je **povezan**, če za vsak par različnih vozlišč obstaja pot med njima.

Drevo je povezan graf brez ciklov.



Nekatera vozlišča so pomembnejša od drugih

Lokalna pomembnost

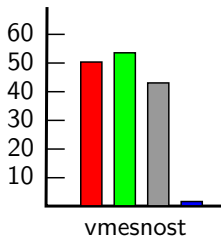
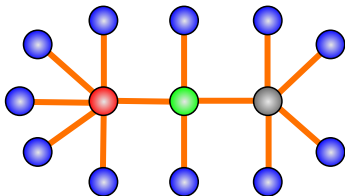
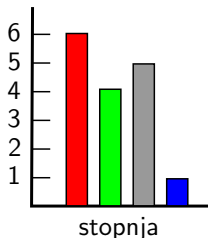
Stopnja danega vozlišča

število vozlišč, ki so sosednji z danim vozliščem

Globalna pomembnost

Vmesnost danega vozlišča

v kolikšni meri sodeluje na najkrajših poteh med preostalimi pari vozlišč



Nekatera vozlišča so pomembnejša od drugih

Lokalna pomembnost

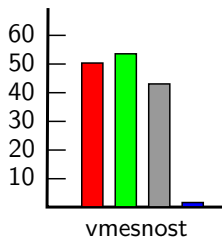
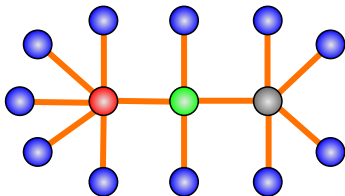
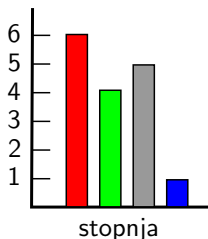
Stopnja danega vozlišča

število vozlišč, ki so sosednji z danim vozliščem

Globalna pomembnost

Vmesnost danega vozlišča

v kolikšni meri sodeluje na najkrajših poteh med preostalimi pari vozlišč



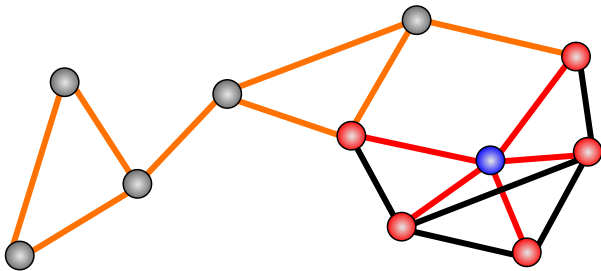
Pomembno vozlišče ima visoko stopnjo/vmesnost. Odstranitev takšnega vozlišča povzroči precejšno spremembo v zgradbi/delovanju omrežja.

Segregacija

Kako dobro je omrežje ločeno na posamezne skupnosti?

Nakopičenje v danem vozlišču

razmerje med številom obstoječih povezav med sosedi vozlišča in številom vseh možnih povezav med sosedi vozlišča

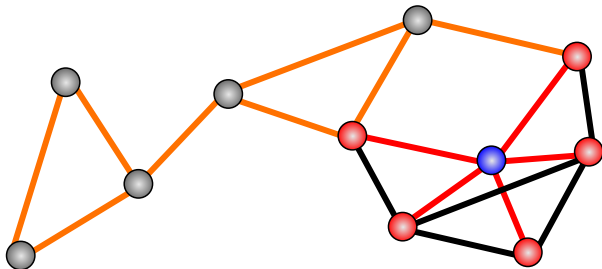


Segregacija

Kako dobro je omrežje ločeno na posamezne skupnosti?

Nakopičenje v danem vozlišču

razmerje med številom obstoječih povezav med sosedi vozlišča in številom vseh možnih povezav med sosedi vozlišča



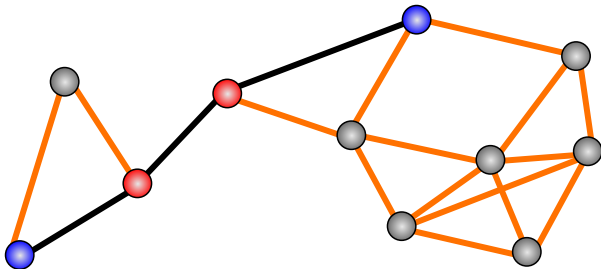
Visoko povprečno nakopičenje je osnova za tvorbo ločenih skupnosti ter posledično visoko segregacijo.

Integracija

Kako dobro so med seboj povezane posamezne skupnosti?

Razdalja med vozliščema

dolžina najkrajše poti med vozliščema

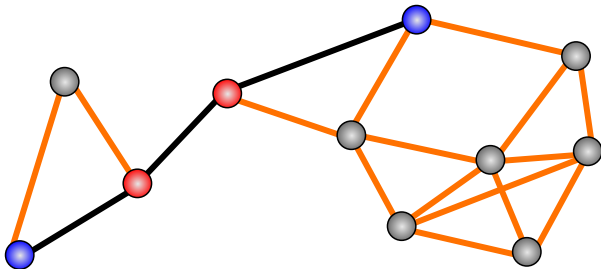


Integracija

Kako dobro so med seboj povezane posamezne skupnosti?

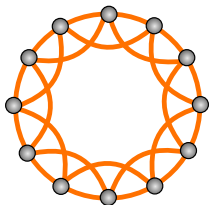
Razdalja med vozliščema

dolžina najkrajše poti med vozliščema

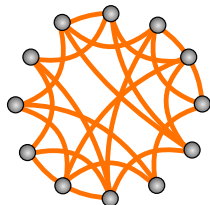


Kratka povprečna razdalja v omrežju odraža visoko globalno integracijo.

Med urejenostjo in kaosom

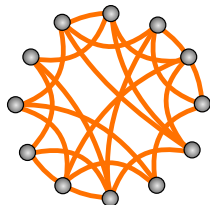
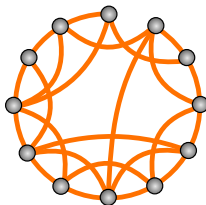
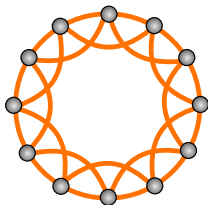


?



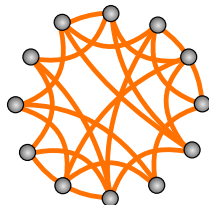
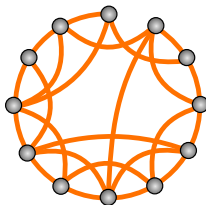
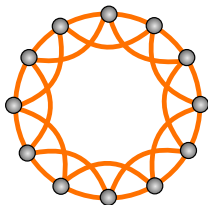
Graf	Obročasta mreža	?	Naključen
Povprečno nakopičenje	visoko	?	nizko
Povprečna razdalja	dolga	?	kratka

Med urejenostjo in kaosom



Graf	Obročasta mreža	Mali svet	Naključen
Povprečno nakopičenje	visoko	visoko	nizko
Povprečna razdalja	dolga	kratka	kratka

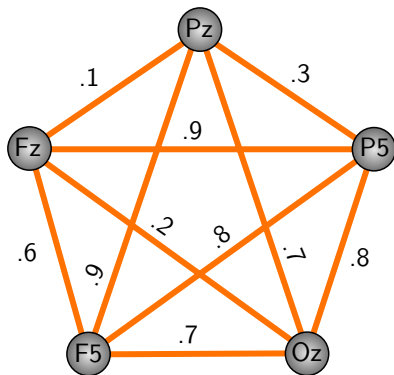
Med urejenostjo in kaosom



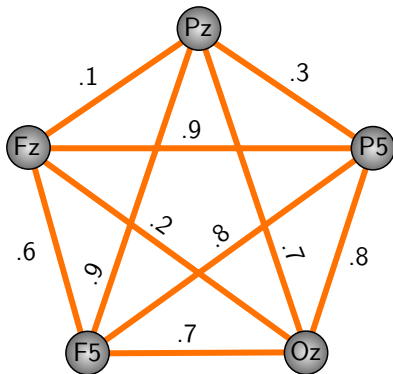
Graf	Obročasta mreža	Mali svet	Naključen
Povprečno nakopičenje	visoko	visoko	nizko
Povprečna razdalja	dolga	kratka	kratka

Možganski graf odraža topologijo malega sveta, ki nudi optimalno ravnovesje med funkcionalno segregacijo in integracijo ter posledično kompleksno organizacijo.

Problem metode praga in alternativni pristop



Problem metode praga in alternativni pristop

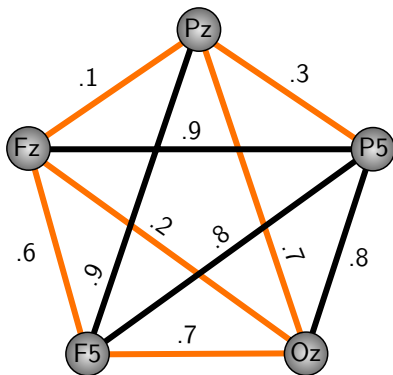


Hrbtenica možganskega grafa

Najdražje vpeto drevo

podgraf, ki je drevo na vseh vozliščih in ima maksimalno vsoto uteži

Problem metode praga in alternativni pristop

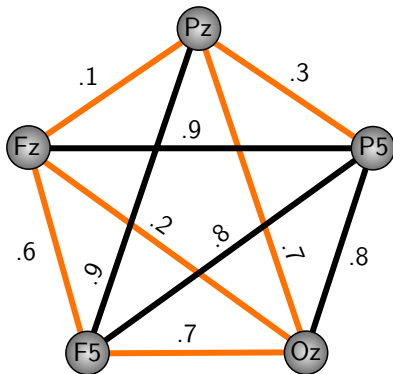


Hrbtenica možganskega grafa

Najdražje vpeto drevo

podgraf, ki je drevo na vseh vozliščih in ima maksimalno vsoto uteži

Problem metode praga in alternativni pristop



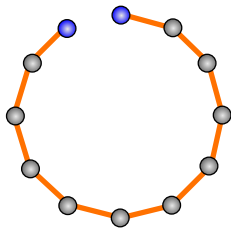
Hrbtenica možganskega grafa

Najdražje vpeto drevo

podgraf, ki je drevo na vseh vozliščih in ima maksimalno vsoto uteži

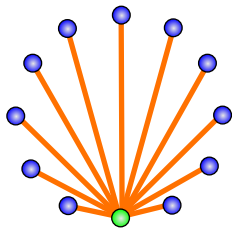
Sprememba topologije najdražjega vpetega drevesa občutno vpliva na spremembe v možganskem grafu.

Od decentralizirane do centralizirane topologije dreves



Pot

?

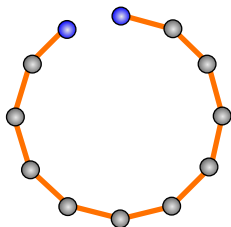


Zvezda

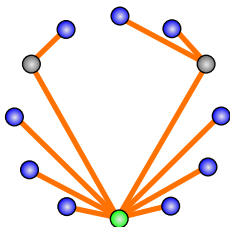
Pot ima dolge razdalje, še posebej med modrima vozliščema.

Zvezda ima kratke razdalje, toda zeleno vozlišče je preobremenjeno!

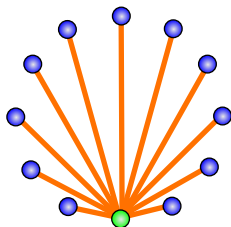
Od decentralizirane do centralizirane topologije dreves



Pot



Hierarhično drevo



Zvezda

Pot ima dolge razdalje, še posebej med modrima vozliščema.

Zvezda ima kratke razdalje, toda zeleno vozlišče je preobremenjeno!

Hierarhično drevo nudi ravnovesje med preobremenjenostjo in integracijo.

Lastnosti omrežja kot diagnostične značilke

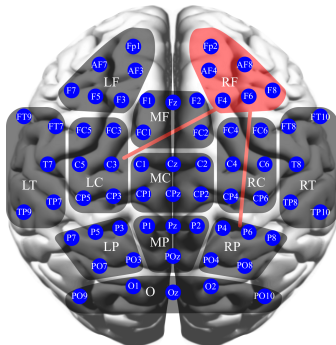
Razlike med skupino pacientov in kontrolno skupino

Blaga kognitivna motnja

znižana funkcionalna povezanost

reorganizacija možganskega omrežja, daljše razdalje

topologija hrbtenice možganskega grafa bolj podobna topologiji poti



Lastnosti omrežja kot diagnostične značilke

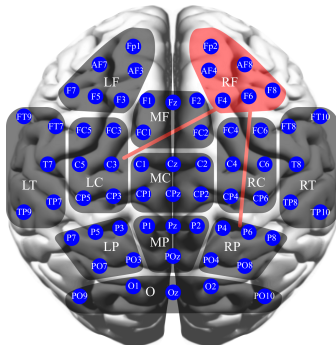
Razlike med skupino pacientov in kontrolno skupino

Blaga kognitivna motnja

znižana funkcionalna povezanost

reorganizacija možganskega omrežja, daljše razdalje

topologija hrbtenice možganskega grafa bolj podobna topologiji poti



Grafovski pristop ima velik potencial, da vpliva tudi na klinične diagnoze in zdravljenje.

Hvala za pozornost!

V naših možganih so milijarde nevronov, a kaj so nevroni? Samo celice. V možganih ni nobenega znanja, dokler se med nevroni ne vzpostavijo povezave. Vse, kar vemo, vse kar smo, izvira iz načina, kako so naši nevroni povezani.

— Tim Berners-Lee