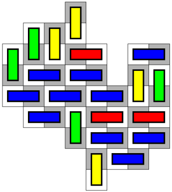
Prekrivanje z dominami

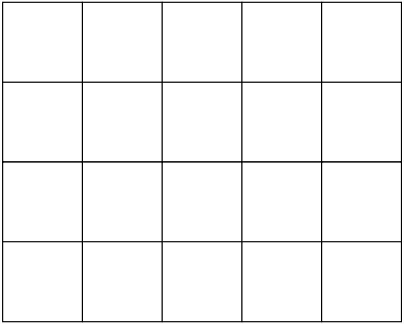
Janko Gravner

Izleti v matematično vesolje
Univerza na Primorskem
27. oktober 2021

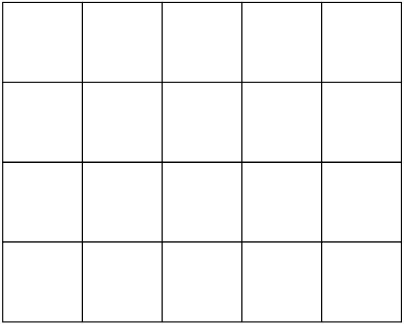


Prekrivanje z dominami

Vzemimo pravokotno ploščo velikosti $m \times n$, tlakovano s kvadrati velikosti 1×1. Ali jo lahko popolnoma prekrijemo z dominami? Predpostavimo, da vsaka domina popolnoma prekrije dva sosednja kvadrata. Različne domine se med sabo ne smejo prekrivati.



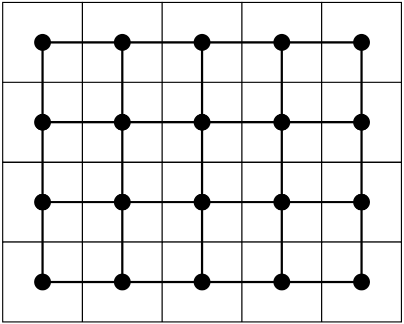
Prekrivanje z dominami



Vsaka domina prekrije dva kvadrata. Če sta m in n oba liha, torej plošče velikosti $m \times n$ ni mogoče popolnoma prekriti. Če pa je vsaj eden od m in n sod, ploščo lahko prekrijemo. Kot se izkaže, ima zgornja plošča velikosti 4×5 natančno 95 različnih prekritij.

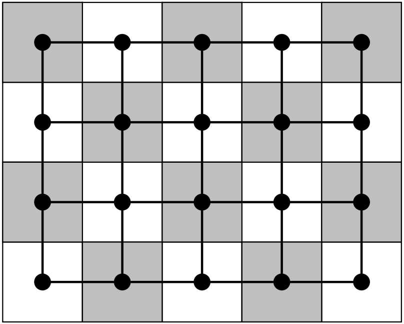
Oglejmo si ta problem bolj natančno. . .

Sosedski graf



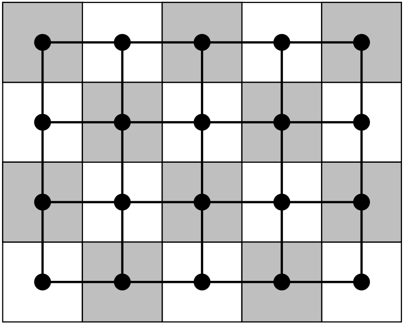
Imamo graf: točke tega grafa so kvadrati in povezave so med vsakima dvema sosednjima kvadratoma; sosednja kvadrata mejita na vodoravni ali navpični stranici.

Dvodelni graf



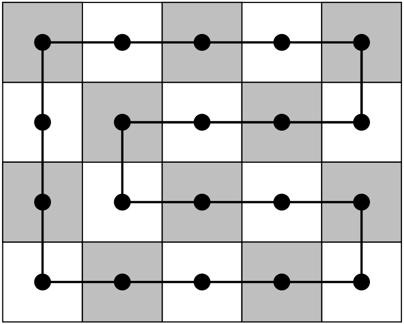
To je *dvodelni graf*. Če obarvamo kvadrate kot na šahovnici, vsaka povezava poveže sosednja kvadrata različne barve. Ta dvodelni graf ima točke razdeljene na »belo« in »črno« stran.

Domine in ujemanje



Vsaka domina, ki jo položimo na ploščo izbere par sosednjih kvadratov, torej eno od povezav. Ko položimo nekaj domin (ki se ne smejo medsebojno prekrivati), smo izbrali nekaj povezav, od katerih nobeni dve nimata skupne točke. Takemu naboru povezav pravimo *ujemanje*. Če je v določenem ujemanju vsaka točka v grafu vključena v neko povezavo, potem je tako ujemanje *popolno*. V tem primeru je plošča popolnoma prekrita z dominami.

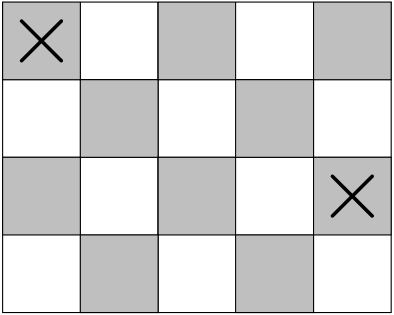
Hamiltonski cikel



Ta graf ima tudi *Hamiltonski cikel*: zaporednje sosednjih točk, ki obiščejo vsako točko natančno enkrat pred vrnitvijo v začetno točko.

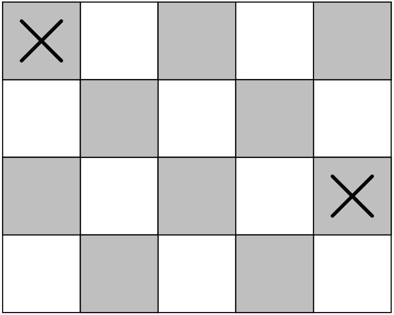
Nepravilne plošče

Iz plošče izločimo dva označena kvadrata. Ali ima tako zmanjšana plošča popolno prekritje z dominami?



Nepravilne plošče

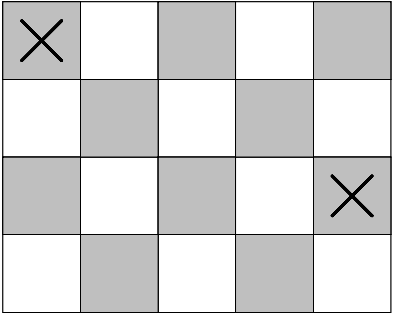
Iz plošče izločimo dva označena kvadrata. Ali ima tako zmanjšana plošča popolno prekritje z dominami?



Ne! Oba izločena kvadrata sta črna. Črna stran našega grafa ima le 8 kvadratov, bela pa 10. Na tako ploščo lahko položimo največ 8 domin.

Nepravilne plošče

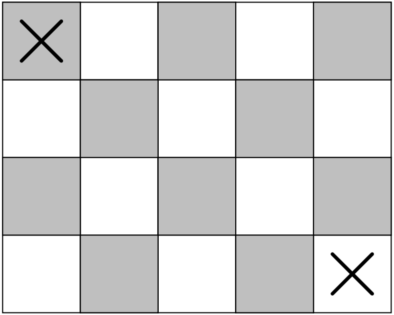
Iz plošče izločimo dva označena kvadrata. Ali ima tako zmanjšana plošča popolno prekritje z dominami?



In res lahko položimo 8 domin. Vsakemu prekritju, ki vključuje največje možno število domin pravimo *maksimalno*. V tem primeru je torej vsako prekritje z osmimi dominami maksimalno.

Nepravilne plošče

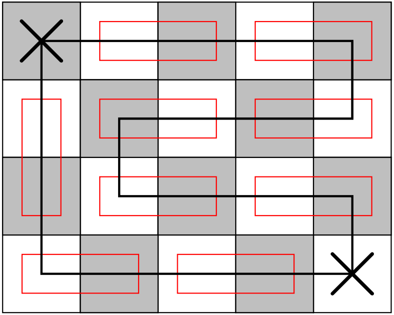
Kaj pa, če izločimo bel in črn kvadrat?



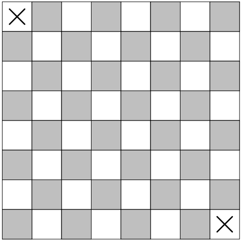
Nepravilne plošče

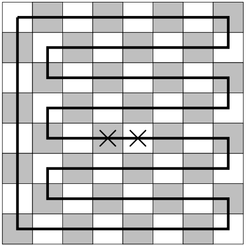
Da!

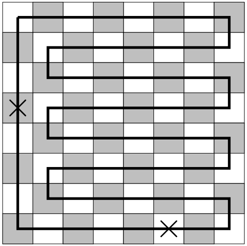
Uporabimo Hamiltonski cikel. To deluje ob izločitvi katerih koli dveh kvadratov različne barve. V tem primeru dva $\times$-a razdelita cikel v dve poti sode dolžine (ali pa ostane ena sama pot sode dolžine, če sta ta dva $\times$-a soseda v Hamiltonskem ciklu).



Nepravilne plošče



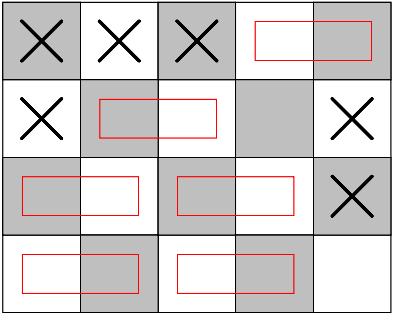




Ti problemi so znani kot uganke »poškodovanih šahovnic«. Zgornja plošča nima popolnega prekritja, spodnji dve pa tako prekritje imata.

Nepravilne plošče

Ali so domine na spodnji sliki maksimalno prekritje?



Algoritem ujemanja

Predpostavimo, da imamo neko prekritje. Naslednji algoritem bodisi dokaže, da je prekritje maksimalno, bodisi najde prekritje z večjim številom domin.

Zaznamuj vse nepokrite bele kvadrate. Potem izmenično:

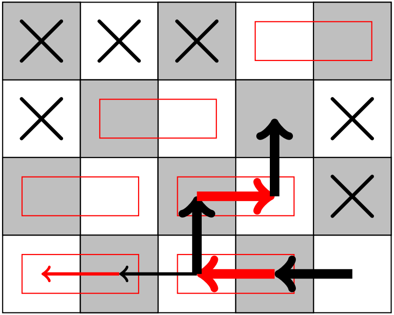
1. zaznamuj vse (dovoljene) nezaznamovane črne kvadrate ki so sosede zaznamovanih belih kvadratov,
2. zaznamuj vse nezaznamovane bele kvadrate ki so pokriti z isto domino kot kateri od zaznamovanih črnih kvadratov,

dokler (u) ne zaznamuješ kakega nepokritega črnega kvadrata, ali pa (n) nobenega kvadrata ni mogoče več zaznamovati. V primeru uspeha (u) najdemo *izmenično pot*, s katero izboljšamo prekrivanje. V primeru neuspeha (n) je prekrivanje maksimalno.

Ta algoritem za dvodelne grafe so leta 1973 razvili John Hopcroft, Richard Karp, in Aleksander Karzanov.

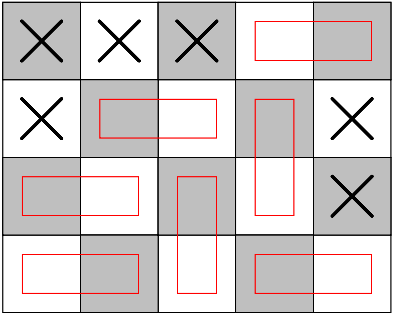
Nepravilne plošče

V našem primeru algoritem najde izmenično pot. Puščice določijo kateri kvadrat zaznamuje katerega.



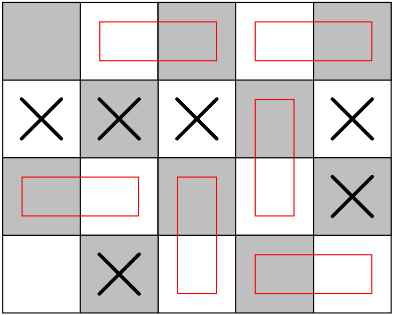
Na odebeljeni izmenični poti odstranimo dve domini, ki prekrivata rdeči puščici in položimo tri domine, ki prekrijejo črne puščice.

Dobimo popolno prekritje.



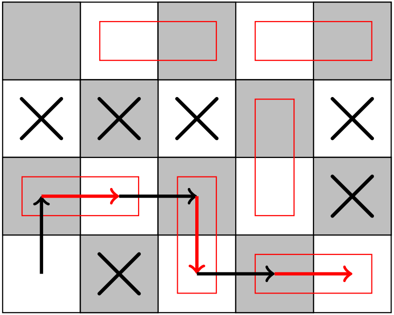
Nepravilne plošče

Ali so domine na spodnji sliki maksimalno prekritje?



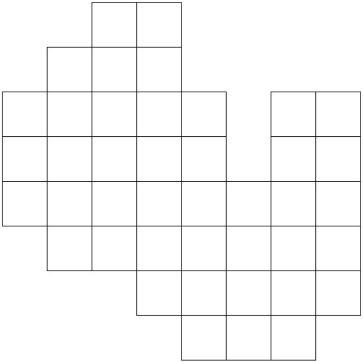
Nepravilne plošče

V tem primeru se algoritem konča z neuspehom. To je maksimalno prekritje.

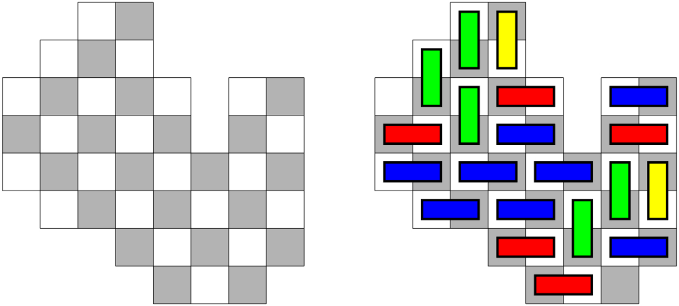


Izpitno vprašanje

Ali je mogoče naslednjo ploščo popolnoma prekriti z dominami? Najdi popolno prekritje ali podaj kratek dokaz, da ne obstaja (MIT, 2015).

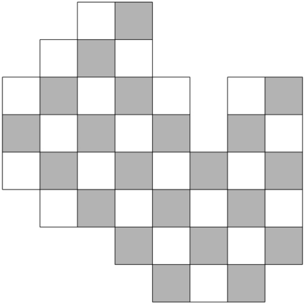


Izpitno vprašanje



Na desni strani je rezultat večkratne uporabe algoritma ujemanja (prvič na prazni plošči in zadnjič ob neuspehu), pri katerem so kvadrati zaznamovani v slučajnem zaporedju. Štiri barve domin ločijo med vodoravnimi in navpičnimi dominami in tistimi ki imajo levo oz. zgornje polje na belem in na črnem kvadratu.

Izpitno vprašanje



Algoritem nam pove, da popolno prekritje ne obstaja. Za kratek dokaz pa opazimo, da ima 11 belih kvadratov levo zgoraj skupno le 10 črnih sosedov. Torej niti teh 11 belih kvadratov ne moremo vseh pokriti.

Hallov poročni izrek pravi, da popopolno pokritje ne obstaja natanko takrat ko obstaja neko število *b* belih kvadratov s strogo manj kot *b* črnimi sosedi.

Thurston-Fournierov algoritem

Za enostavno povezane plošče (tj., tiste brez lukenj) obstaja bolj učinkovit linearni algoritem, ki preveri, ali ima plošča popolno prekritje. Osnovan je na Thurstonovi interpretaciji (1991) prekritja kot konservativnega vektorskega polja, ki preko krivuljnih integralov definira tri-razsežno ploskev. Za popolno prekritje mora rob te ploskve zadoščati določenemu Lipshitzovemu pogoju.

William Thurston (1946–2012), Fieldsov nagrajenec

Koliko prekritij?

Za pravokotno ploščo dimenzije $m \times n$ je število popolnih prekritij dano s Kasteleynovo formulo (1961)

$$\prod_{i=1}^{\lceil \frac{m}{2} \rceil} \prod_{j=1}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \left(4\cos^2 \frac{\pi i}{m+1} + 4\cos^2 \frac{\pi j}{n+1} \right).$$

Kasteleynov algebraični pristop, ki poveže štetje z determinantami matrik, igra še danes pomembno vlogo.

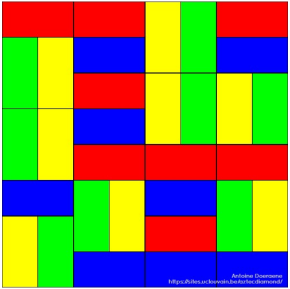
V statistični fiziki so domine konfiguracije dimerov, ki se adsorbirajo na ravninski plošči.

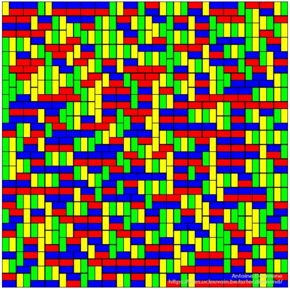
Enostavni matematični modeli nimajo direktne uporabe v eksperimentalni fiziki, služijo pa kot vodilo v bolj zapletene procese.

Pieter Kasteleyn (1924–1996), nizozemski teoretični fizik

Naključno izbrano prekritje

Po Kasteleynovi formuli ima običajna šahovska plošča natančno 12 988 816 prekritij. Spodaj sta naključno izbrani prekritji (vsako izbrano z enako verjetnostjo) šahovske plošče in plošče velikosti 40×40.





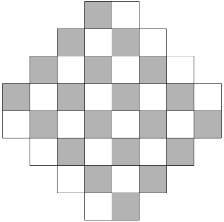
Naključno izbrano prekritje

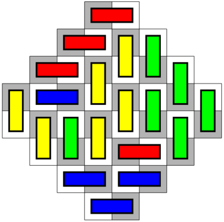
Kaotični videz ne vara: limita (ko se velikost prošče veča) pripadajoče Thurstonove ploskve je Gausovo prosto polje, matematična abstrakcija popolnoma neregularne prostorske strukture z danimi statističnimi lastnostmi (Richard Kenyon, 2001).

Richard Kenyon

Azteški romb

Azteški romb A_n ima širino in višino $2n$. Tukaj je A_4 z naključno izbranim prekritjem:

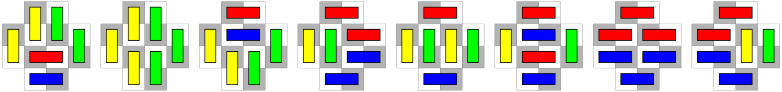




Azteški romb A_n ima natančno

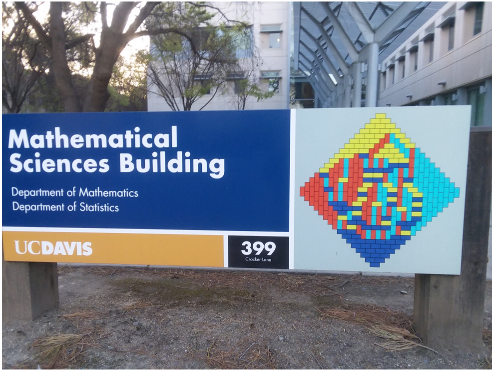
$$2^{n(n+1)/2}$$

prekritij. Na primer, A_2 ima 8 prekritij:



Azteški romb

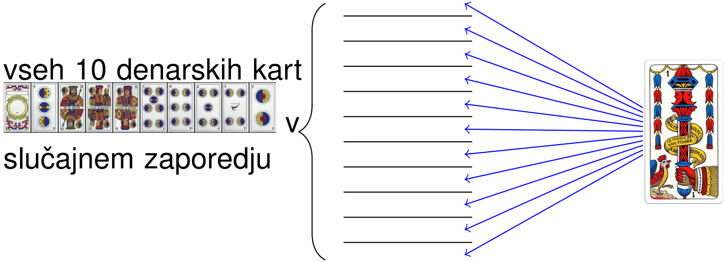
Dokaz enostavne formule za število prekritij ni enostaven! Prvi dokaz je bil objavljen leta 1992, avtorji pa so Noam Elkies, Greg Kuperberg, Michael Larsen, in James Propp.
Pomen prekritij Azteškega romba v razvoju sodobne matematike je priznan s sliko, ki pozdravi obiskovalce matematične stavbe na Univerzi Kalifornije v Davisu.



Mešanje domin

Kako naključno izberemo pokritje velikega Azteškega romba? Je mogoče iz naključnega prekritja A_n narediti naključno prekritje A_{n+1}?

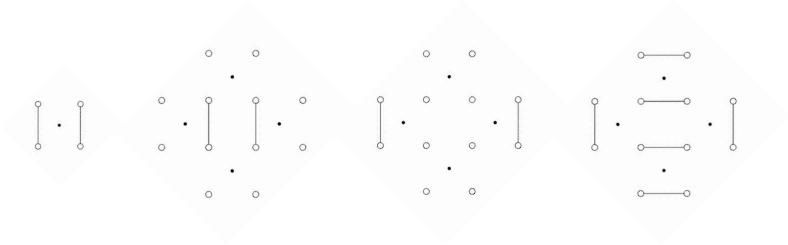
Analogni problem pri mešanju kart: če imamo prvih k kart v slučajnem zaporedju, in karto $k+1$ postavimo na slučajno izbrano pozicijo (eno od $k+1$ pozicij) med njimi, dobimo slučajno zaporedje $k+1$ kart.



Mešanje domin

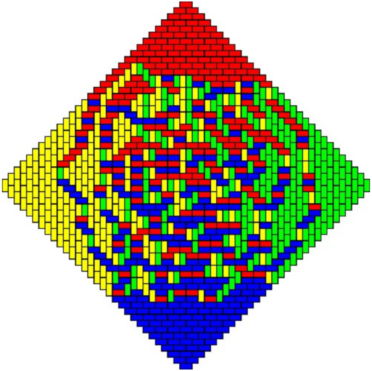
James Propp je leta 2001 predstavil algoritem za induktivno mešanje domin. Tukaj je primer koraka iz A_1 v A_2 iz njegovega članka:

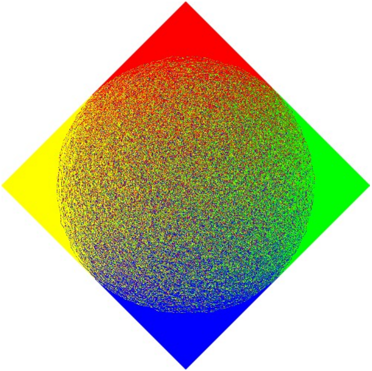
James Propp



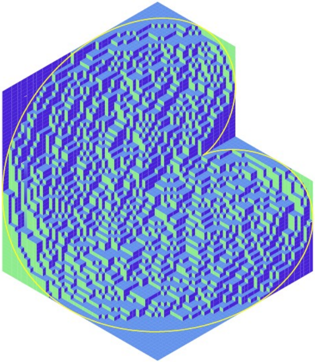
Izrek o polarnem krogu

Slučajno izberimo eno od prekrivanj Azteškega romba, vsako z enako verjetnostjo. Potem je zunaj kroga, ki je tangenten na vse štiri stranice, prekrivanje »zamrznjeno«: domine so urejene, položene kot opeke v zidu. To je bilo dokazano leta 1998 (avtorji: William Jockusch, James Propp, Peter Shor).





Drugačna prekritja (recimo prekritja šesterokotnih plošč z rombi) porodijo drugačne krivulje, kot na primer kardioido na desni sliki (Richard Kenyon in Andrej Okunkov, 2005). Te krivulje so algebraične (dane s polinomsko enačbo). Za povezavo verjetnosti z algebraično geometrijo je Andrej Okunkov dobil leta 2006 Fieldsovo medaljo.



Andrej Okunkov

Hvala!