Sprehod skozi Bolyaijevo nenavadno vesolje

István Kovács

Univerza na Primorskem

Famnitovi izleti v matematično vesolje

21. 04. 2021

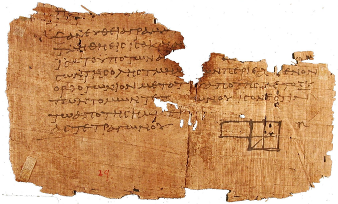
Evklid

- **Evklid** (včasih tudi **Evklid iz Aleksandrije**) je starogrški matematik, ki deloval je v Alkesandriji okoli 300 pr. n. št.
- Njegova knjiga *Elementi* spada med najbolj vplivna dela v zgodovini matematike.
- V Elementih je Evklid izvedel načela Evklidske geometrije iz majhne zbirke definicij in postulatov (aksiomov).
- Elemente so uporabljali kot učilo za študij matematike, posebno geometrije, od njegove objave vse tja do poznega 19. in zgodnjega 20. stoletja.

Evklid iz Aleksandrije

Elementi

- Elementi se sestavlja iz 13 knjig.
- Prva knjiga obravnava osnovne lastnosti ravnine in začne z 23-imi definicijami (točka, premica, krožnica, prvakota, itd.) in 5-imi postulati (aksiomi).
- Definicije in postulate sprejemo brez dokaza.
- Razen definicij in postulatov, Elementi vsebujejo trditve, ki so deduktivno izpeljane iz definicij in postulatov.



Ohranjen kos Elementov (najden v Egiptu, ki izvira iz okoli 100).

Pet postulatov iz Elementov

1. Obstaja premica med danima dvema točkama.
2. Vsaka premica je nekončna.
3. Obstaja krožnica s vsakem podanim centrom in polmerom.
4. Vsaka dva pravkota sta enaka.
5. Če poljubni premici sekamo s tretjo premico (prečnico) in je vsota notranjih kotov eni strani prečnice manjša od dveh pravih kotov, potem se dani premici sekata na tej strani prečnice.

Moderni aksiomi Evklidske geometrije (ravnine)

- Sistematčno študijo Evklidske geometrije je predstavil nemški matematik **David Hilbert** v njegovi knjigi *Grundlagen der Geometrije* (1899).
- Hilbert je predlagal 21 aksiomov.
- Tukaj pokažem enostavnejšo verzijo, ki je sestavljena le iz 5 aksiomov. Ta sistem temelji na obstoj realnih števil (oznaka: $\mathbb{R}$).

David Hilbert (1862–1943)

Osnovni koncepti Evklidske geometrije

Evklidska geometrija je četverica (S, L, d, m).

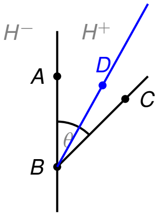
- Elementi v S se imenujejo točke.
- Elementi v L se imenujejo premice ($l \subset S$ za $l \in L$).
- Funkcija razdalje $d : S \times S \to \mathbb{R}$ zadošča pogojem:
  - $d(A, B) \geq 0$.
  - $d(A, B) = 0 \iff A = B$.
  - $d(A, B) = d(B, A)$.

Osnovni koncepti Evklidske geometrije

Evklidska geometrija je četverica (S, L, d, m).

- S : množica toč, L : množica premic, d: funkcija razdalje.
- Velikost kota $m : \{\angle ABC : A, B, C \in S\} \to \mathbb{R}$ zadošča pogojem:
  - $0 < m(\angle ABC) < 180$.
  - Za dano polravnino H^+ premice AB in $0 < \theta < 180$ obstaja enolično določen kot $\angle ABC$ tako, da veljata $C \in H^+$ in $m(\angle ABC) = \theta$.
  - Če je D v notranjosti kota $\angle ABC$, potem velja

$$m(\angle ABC) = m(\angle ABD) + m(\angle DBC).$$

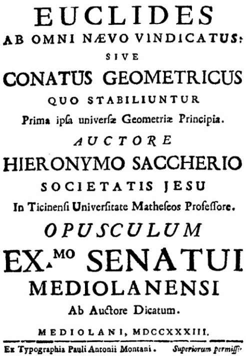


Aksiomi

1. Vsaki točki A, B ležita na enolično določeni premici.
2. **(Obstoj merila)** Za vsako premico l obstaja bijekcija $f : l \to \mathbb{R}$ z lastnostjo: $d(A, B) = |f(A) - f(B)|$ za vsaki A, B na l.
3. **(Pashevi postulat)** Če neka premica seka ΔABC v stranici $\overline{AB}$, potem tudi seka eno od ostalnih stranic.
4. **(Stranica-Kot-Stranica aksiom)** Če ΔABC in ΔDEF zadoščata pogojem: $d(A, B) = d(D, E)$, $d(B, C) = d(E, F)$ in $m(\angle ABC) = m(\angle DEF)$, potem sta ΔABC in ΔDEF skladna.
5. **(Evklidska lastnost vzporednosti)** Če točka A ne leži na premici l, potem obstaja enolično določena premica l' skozi A, ki je vzporedna z l.

Ali lahko pustimo 5. postulat?

- Velikov matematikov je poskusilo izpeljati 5. postulat iz drugih postulatov.
- Tukaj pokažem eden takšni poskus.
- **Giovanni Girolamo Saccheri** (1667 – 1733) je bil italijanski jezuitski filozof in matematik.
- Saccheri je dokazal v njegovem zadnjem delu *Euclides ab omni naevo vindicatus* (1733), da je 5. postulat ekvivalenten pogoju, da je vsota notranjih kotov trikotnika enaka 180.


EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipſa univerſæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinenſi Univerſitate Matheſeos Profeſſore.
OPUSCULUM
EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorum permiſſu.

Prva stran "Euclides ab omni naevo vindicatus" (1733).

Saccherijev izrek

Absolutna geometrija je četverica (S, L, d, m), ki zadošča aksiomom:

1. Vsaki točki A, B ležita na enolično določeni premici.
2. **(Obstoj merila)** Za vsako premico l obstaja bijekcija $f : l \to \mathbb{R}$ z lastnostjo: $d(A, B) = |f(A) - f(B)|$ za vsaki A, B na l.
3. **(Pashevi postulat)** Če neka premica seka ΔABC v stranici $\overline{AB}$, potem tudi seka eno od ostalnih stranic.
4. **(Stranica-Kot-Stranica aksiom)** Če ΔABC in ΔDEF zadoščata pogojem: $d(A, B) = d(D, E)$, $d(B, C) = d(E, F)$ in $m(\angle ABC) = m(\angle DEF)$, potem sta ΔABC in ΔDEF skladna.

Saccherijev izrek (1733)

V absolutni geometriji je vsota notranjih kotov trikotnika manjša ali enaka 180 in 5. postulat drži natanko tedaj, ko je vsota enaka 180.

Khayyám–Saccherijev štirikotnik

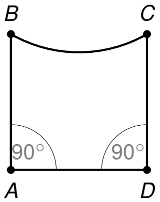
Saccherijev izrek (1733)

V absolutni geometriji je vsota notranjih kotov trikotnika manjša ali enaka 180 in 5. postulat drži natanko tedaj, ko je vsota enaka 180.

- Saccheri je hotel pokazati, da je vsota enaka 180, in tako bi dobil, da je absolutna geometrija ista kot Evklidska geometrija.
- Pri dokazu je uporabil nekatere lastnosti posebnega štirikotnika, ki se danes imenuje Khayyám–Saccherijev štirikotnik po njemu in prezijskem matematiku **Omar Khayyám** (1048–1131).

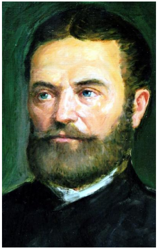
Štirikotnik $\square ABCD$ je Khayyám–Saccherijev če veljata

- $d(A, B) = d(C, D)$ in
- $m(\angle DAB) = m(\angle CDA) = 90$.



Hiperbolična geometrija

- Madžarski matematik **János Bolyai** je tudi poskušal dokazati 5. postulat na podlagi ostalih aksiomov.
- Potem pa je prišel do sklepa, da je 5. postulat neodvisen od ostalih aksiomov in da je možno na podlagi negacije tega aksioma priti do geometrijskega sistema, ki je precej drugačen od Evklidske geometrije. Danes se ta geometrija imenuje hiperbolična geometrija.
- Približno istočasno kot Bolyai (in neodvisno od njega) je prišel do istega zaključka tudi ruski matematik **Nikolaj Ivanovič Lobačevski**.



János Bolyai (1802–1860)

Nikolaj Ivanovič Lobačevski (1792–1856)

Pismo Bolyaija očetu

- Oče J. Bolyaija, ime mu je bilo **Farkas Bolyai**, je bil tudi matematik.
- F. Bolyai je bil v redni korespondenci z znanim nemškim matematikom **Friedrichom Gaussom**.
- Leta 1823, János Bolyai je poslal pismo očetu, v katerem je navdušeno pisal o novi geometriji:

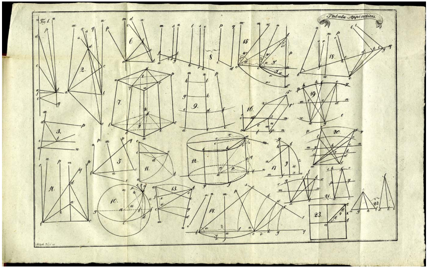
  "Iz nič sem ustvaril nenavadno novo vesolje".

Farkas Bolyai (1775–1856)

Friedrich Gauss (1777–1855).

Appendix

- V letih 1820–23 je J. Bolyai pripravil obsežen pregled svojih izsledkov.
- Delo je bilo objavljeno leta 1832 kot dodatek k knjigi *Tentamen*, ki jo je napisal njegov oče, in je zato znano kot *Appendix (Dodatek)*.
- J. Bolyai že pri 13 letih je obvladal vsa glavna poglavja višje matematike vključno z infinitezimalnim računom.
- Obvladal je devet tujih jezikov - med njimi tudi kitajščino in tibetanščino.



Slike iz Appendix-a.

Axiomi

Hiperbolična geometrija je četverica (S, L, d, m), ki zadošča aksiomom:

1. Vsaki točki A, B ležita na enolično določeni premici.
2. **(Obstoj merila)** Za vsako premico l obstaja bijekcija $f : l \to \mathbb{R}$ z lastnostjo: $d(A, B) = |f(A) - f(B)|$ za vsaki A, B na l.
3. **(Pashevi postulat)** Če neka premica seka ΔABC v stranici $\overline{AB}$, potem tudi seka eno od ostalnih stranic.
4. **(Stranica-Kot-Stranica aksiom)** Če ΔABC in ΔEFG zadoščata pogojem: $d(A, B) = d(E, F)$, $d(B, C) = d(F, G)$ in $m(\angle ABC) = m(\angle EFG)$, potem sta ΔABC in ΔEFG skladna.
5. **(Hiperbolična lastnost vzporednosti)** Če točka A ne leži na premici l, potem obstaja več kot ena premica l' skozi A, ki je vzporedna z l.

Poincaréjeva ravnina

- Znani model Evklidske geomterije je Kartezična ravnina, ki se jo učimo v srednji šoli.

  Točke so pari (x, y), $x, y \in \mathbb{R}$, premice so podane z enačbami $x = a$ oz. $y = ax + b$, itd.

- Tukaj pokažemo model hiperbolične geometrije, ki jo je odkril francoski matematik **Henri Poincaré** in se imenuje Poincaréjeva ravnina.

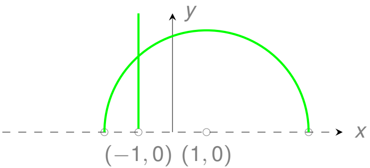
- Prednost tega modela je, da temelji na Kartezični ravnini.

Henri Poincaré (1854–1912)

Točke in premice Poincaréjeve ravnine

- Točke: $A = (x, y)$, kjer $x, y \in \mathbb{R}$ in $y > 0$.
- Premice:

$$
\begin{aligned}
L_a &= \{(a, y) : y > 0\} \quad \text{(prva tipa)}.\\
{}_cL_r &= \{(x, y) : (x-c)^2 + y^2 = r^2\} \quad \text{(druga tipa)}.
\end{aligned}
$$



$$L_{-1} \leftrightarrow x = -1, \; {}_1L_3 \leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 3^2.$$

Naloga. Pokažite, da vsaki točki A, B ležita na enolično določeni premici.

Funkcija razdalje Poincaréjeve ravnine

Naj bosta $A = (x_A, y_A)$ in $A = (x_B, y_B)$ točki v Poincaréjevi ravnini.

Hiperbolična funkcija razdalje d_H je definirana s predpisom:

- Če premica AB je prva tipa, potem

$$d_H(A, B) := \left|\ln\left(\frac{y_A}{y_B}\right)\right|.$$

- Če premica AB je druga tipa in $AB =_c L_r$, potem

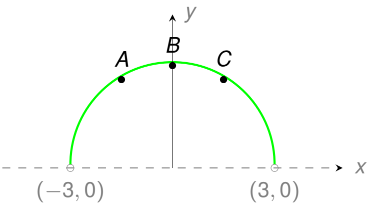
$$d_H(A, B) := \left|\ln\left(\frac{x_A - c + r}{y_A} : \frac{x_B - c + r}{y_B}\right)\right|.$$

Naloga. Pokažite, da je d_H res funkcija razdalje.

Primer

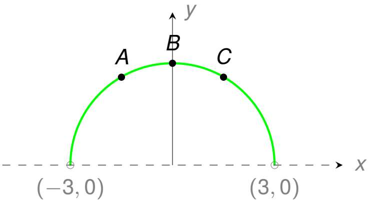
Example

Naj bodo $A = (-3/2, \sqrt{27}/2)$, $B = (0, 3)$ in $C = (3/2, \sqrt{27}/2)$ v Poincaréjevi ravnini. Pokažemo, da je B enaka središči daljice $\overline{AC}$.



A, B in C ležijo na premici ${}_0L_3$ ker

$$(x_A - 0)^2 + y_A^2 = 9/4 + 27/4 = 3^2,$$
$$(x_B - 0)^2 + y_B^2 = 3^2,$$
$$(x_C - 0)^2 + y_C^2 = 9/4 + 27/4 = 3^2.$$



Izračunamo razdaljo med A in B:

$$d_H(A,B) = \left|\ln\left(\frac{-3/2-0+3}{\sqrt{27}/2} : \frac{0-0+3}{3}\right)\right| = \left|\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right| = \ln(\sqrt{3}).$$

Potem med C in B:

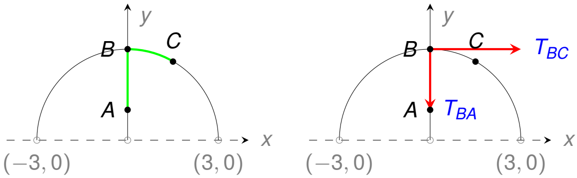
$$d_H(C,B) = \left|\ln\left(\frac{3/2-0+3}{\sqrt{27}/2} : \frac{0-0+3}{3}\right)\right| = \left|\ln\left(\frac{9}{\sqrt{27}}\right)\right| = \ln(\sqrt{3}).$$

Torej B je res središče daljice $\overline{AC}$.

Velikost kotov Poincaréjeve ravnine

Example

Naj bodo $A = (0, 1)$, $B = (0, 3)$ in $C = (3/2, \sqrt{27}/2)$ v Poincaréjevi ravnini. Pokažemo, da je hiperbolična velikost kotov $m_H(\angle ABC) = 90$.



Evklidska tangentna vectorja: $T_{BA} = (0, -2)$ in $T_{BC} = (3, 0)$.

$$\begin{aligned} m_H(\angle ABC) &= m_E(T_{BA}, T_{BC}) = \arccos\left(\frac{\langle T_{BA}, T_{BC}\rangle}{||T_{BA}|| \cdot ||T_{BC}||}\right) = \\ &= \arccos\left(\frac{0 \cdot 3 + (-2) \cdot 0}{2 \cdot 3}\right) = 90. \end{aligned}$$

Evklidski tangentni vektor

Naj bosta $A = (x_A, y_A)$ in $B = (x_B, y_B)$ točki v Poincaréjevi ravnini.

Evklidski tangentni vektor T_{BA} je definiran s predpisom:

- Če premica AB je prva tipa, potem

$$T_{BA} := (0, y_A - y_B).$$

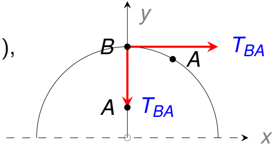
- Če premica AB je druga tipa in $AB =_c L_r$, potem

$$T_{BA} := \begin{cases} (y_B, c - x_B) & \text{če } x_B < x_A, \\ -(y_B, c - x_B) & \text{če } x_B > x_A. \end{cases}$$

$$A = (0,1) \text{ or } (3/2, \sqrt{27}/2),$$

$$B = (0,3),$$

$$BA = L_0 \text{ or } BA =_0 L_3.$$



Hiperbolična velikost kotov

Naj bodo $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ in $C = (x_C, y_C)$ nekolinearne točke v Poincaréjevi ravnini.

Naj bosta T_{BA} and T_{BC} Evklidska tangentna vektorja.

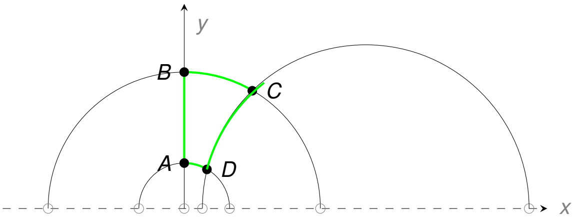
Hiperbolična velikost kota m_H je definirana s predpisom:

$$\begin{aligned} m_H(\angle ABC) &:= m_E(T_{BA}, T_{BC}) \\ &:= \arccos\left(\frac{\langle T_{BA}, T_{BC}\rangle}{||T_{BA}|| \cdot ||T_{BC}||}\right). \end{aligned}$$

Saccherijev štirikotnik v Poincaréjevi ravnini

Example

Naj bodo $A = (0, 1)$, $B = (0, 3)$, $C = (3/2, \sqrt{27}/2)$ in $D = (1/2, \sqrt{3}/2)$ v Poincaréjevi ravnini.



Naloga. Pokažite, da je $\square ABCD$ Saccherijev štirikotnik.

Lahko opazimo, da je Evklidska razdalja med B in C natančno trikrat več kot razdalja med A in D, **ampak(!)** Hiperbolični razdalji sta enaki.

Kot-Kot-Kot Izrek Skladnosti

Na koncu mojem predavanju dokažem eno zanamivo lastnost trikotnikov v Hiperbolični geometriji.

Kot-Kot-Kot Izrek Skladnosti

Naj bosta ΔABC in ΔDEF trikotnika v Hiperbolični geometriji tako, da veljajo

$m(\angle ABC) = m(\angle DEF)$,

$m(\angle CAB) = m(\angle FDE)$,

$m(\angle BCA) = m(\angle EFD)$.

Potem sta ΔABC in ΔEFG skladna.

Ta izrek seveda ne drži v Evklidski geomteriji. V Evklidski geometriji če pripadajoči koti so enaki, potem sta trikotnika le podobna.

Defekt trikotnikov

Za dokaz potrebujemo sledečo definicijio.

Definicija

Naj bo ΔABC trikotnik v absolutni geometriji. Potem njegov defekt je definiran kot

$$\delta(\Delta ABC) = 180 - m(\angle ABC) - m(\angle CAB) - m(\angle BCA).$$

Saccherijev izrek (1733)

V absolutni geometriji vsota notranjih kotov trikotnika je manjša ali enaka 180 in 5. postulat drži natanko tedaj, ko je vsota enaka 180.

Torej v Hiperbolični geometriji velja

$$0 < \delta(\Delta ABC) < 180.$$

Vsota defekta

Lema

Naj bo ΔABC trikotnik v Hiperbolični geometriji in naj bo D notranja točka stranice $\overline{AB}$. Potem velja

$$\delta(\Delta ABC) = \delta(\Delta ABD) + \delta(\Delta BCD).$$

Dokaz.

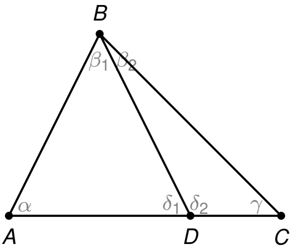
$\delta(\Delta ABD) = 180 - \alpha - \beta_1 - \delta_1.$

$\delta(\Delta BCD) = 180 - \gamma - \beta_2 - \delta_2.$

$\beta_1 + \beta_2 = \beta$ in $\delta_1 + \delta_2 = 180.$

$\Longrightarrow$

$\delta(\Delta ABD) + \delta(\Delta BCD) = 180 - \alpha - \beta - \gamma = \delta(\Delta ABC).$



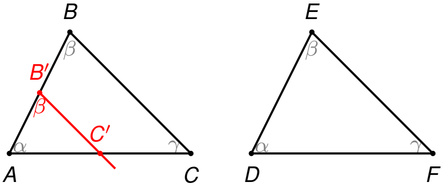
Q.e.d.

Kot-Kot-Kot Izrek Skladnosti

Dokaz. S protislovjem. Lahko predpostavimo, da velja $d(A, B) > d(D, E)$.

Potem lahko izberimo točko B' tako, da B' leži na stranici $\overline{AB}$ in $d(A, B') = d(D, E)$.

Narišemo premico l skozi B' s kotom β. Naj bo C' presečišče od premic l in AC. Obstoj presečišča sledi iz dejstva, da sta l in BC vzporedna in iz Paschevega postulata.

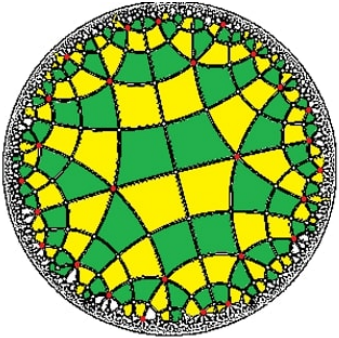


Stranica-Kot-Stranica axiom $\implies$ $\Delta AB'C'$ in ΔDEF sta skladna.

Lema $\implies$ $\delta(\Delta ABC) > \delta(\Delta AB'C') = \delta(\Delta DEF) = \delta(\Delta ABC)$.

To je protislovje. **Q.e.d.**

$\mathcal{H}$vala za $\mathcal{P}$ozornost!



Tilings of the Poincaré disk model of the Hyperbolic geometry having Saccheri quadrilaterals as fundamental domains.