Matematika v ozadju igre Sudoku

Slobodan Filipovski

UP FAMNIT, IAM in UL FMF

20. Marec 2024
Koper

Kaj je Sudoku?

Sudoku Pravila: V prazna polja delno zapolnjene kvadratne 9×9 tabele vnesi številke od 1 do 9 tako, da je vseh 9 številk:

- v vsaki vrstici;
- v vsakem stolpcu;
- in v vsakem manjšem 3×3 kvadratu (bloku).

8			4		6			7
						4		
	1					6	5	
5		9		3		7	8	
				7				
	4	8		2		1		3
	5	2					9	
		1						
3			9		2			5

Sestavljalec uganke Sudoku ima dve glavni nalogi:

1. Pripraviti Sudoku tabelo, ki jo uporabi kot končno rešitev.

Sestavljalec uganke Sudoku ima dve glavni nalogi:

1. Pripraviti Sudoku tabelo, ki jo uporabi kot končno rešitev.
2. Ustvariti nekaj podmnožic kvadratkov tabele, ki so vnaprej podane številke ("začetnih namigov").

Sestavljalec uganke Sudoku ima dve glavni nalogi:

1. Pripraviti Sudoku tabelo, ki jo uporabi kot končno rešitev.
2. Ustvariti nekaj podmnožic kvadratkov tabele, ki so vnaprej podane številke ("začetnih namigov").

Na primer:

4	5							
		2		7		6	3	
							2	8
			9	5				
	8	6				2		
	2		6			7	5	
						4	7	6
	7			4	5			
		8			9			

4	5	3	8	2	6	1	9	7
8	9	2	5	7	1	6	3	4
1	6	7	4	9	3	5	2	8
7	1	4	9	5	2	8	6	3
5	8	6	1	3	7	2	4	9
3	2	9	6	8	4	7	5	1
9	3	5	2	1	8	4	7	6
6	7	1	3	4	5	9	8	2
2	4	8	7	6	9	3	1	5

Naiven pregled vseh rešitev

Uganka Sudoku, to je množica "začetnih namigov", je dopustna, če:

1. Ima rešitev. (Rešljivost)

Naiven pregled vseh rešitev

Uganka Sudoku, to je množica "začetnih namigov", je dopustna, če:

1. Ima rešitev. (Rešljivost)
2. Obstaja natanko ena rešitev. (Enoličnost)

Naiven pregled vseh rešitev

Uganka Sudoku, to je množica "začetnih namigov", je dopustna, če:

1. Ima rešitev. (Rešljivost)
2. Obstaja natanko ena rešitev. (Enoličnost)

Vprašanje: Koliko znaša najmanjšo število začetnih namigov v dopustni uganki Sudoku?

Naiven pregled vseh rešitev

Uganka Sudoku, to je množica "začetnih namigov", je dopustna, če:

1. Ima rešitev. (Rešljivost)
2. Obstaja natanko ena rešitev. (Enoličnost)

Vprašanje: Koliko znaša najmanjšo število začetnih namigov v dopustni uganki Sudoku?

Možna rešitev ("naivna"):

1. Določimo vse možne nabore začetnih namigov.

Naiven pregled vseh rešitev

Uganka Sudoku, to je množica "začetnih namigov", je dopustna, če:

1. Ima rešitev. (Rešljivost)
2. Obstaja natanko ena rešitev. (Enoličnost)

Vprašanje: Koliko znaša najmanjšo število začetnih namigov v dopustni uganki Sudoku?

Možna rešitev ("naivna"):

1. Določimo vse možne nabore začetnih namigov.
2. Preverimo vsakega, da vidimo, ali je rešljiv.

Naiven pregled vseh rešitev

Uganka Sudoku, to je množica "začetnih namigov", je dopustna, če:

1. Ima rešitev. (Rešljivost)
2. Obstaja natanko ena rešitev. (Enoličnost)

Vprašanje: Koliko znaša najmanjšo število začetnih namigov v dopustni uganki Sudoku?

Možna rešitev ("naivna"):

1. Določimo vse možne nabore začetnih namigov.
2. Preverimo vsakega, da vidimo, ali je rešljiv.
3. Preverimo rešljive, da vidimo, ali so enolični.

Naiven pregled vseh rešitev

Uganka Sudoku, to je množica "začetnih namigov", je dopustna, če:

1. Ima rešitev. (Rešljivost)
2. Obstaja natanko ena rešitev. (Enoličnost)

Vprašanje: Koliko znaša najmanjšo število začetnih namigov v dopustni uganki Sudoku?

Možna rešitev ("naivna"):

1. Določimo vse možne nabore začetnih namigov.
2. Preverimo vsakega, da vidimo, ali je rešljiv.
3. Preverimo rešljive, da vidimo, ali so enolični.
4. Preštejemo število začetnih namigov v najmanjši enolično rešljivi uganki in izpišemo najmanjše takšno število.

Zakaj je naivna metoda nepraktična?

Zakaj je naivna metoda nepraktična?

Na voljo imamo 10 možnosti za vsebino vsake celice: od 1 do 9 ali je celica prazna. To pomeni skupno 10^{81} možnih naborov začetnih namigov.

Zakaj je naivna metoda nepraktična?

Na voljo imamo 10 možnosti za vsebino vsake celice: od 1 do 9 ali je celica prazna. To pomeni skupno 10^{81} možnih naborov začetnih namigov.

To je približno število atomov v opazljivem (nam vidnem) vesolju (med 10^{78} in 10^{82}.)

Zakaj je naivna metoda nepraktična?

Na voljo imamo 10 možnosti za vsebino vsake celice: od 1 do 9 ali je celica prazna. To pomeni skupno 10^{81} možnih naborov začetnih namigov.

To je približno število atomov v opazljivem (nam vidnem) vesolju (med 10^{78} in 10^{82}.)

In za vsakega moramo preveriti, ali je dopustna Sudoku uganka.

Nekoliko pametnejši pristop

Če malo bolje premislimo. . .

1. Določimo vse nabore, ki imajo 81 začetnih namigov, in, če najdemo dopustno uganko, določimo vse nabore, ki imajo 80 začetnih namigov, in če, najdemo dopustno uganko, določimo, vse nabore, ki imajo 79 začetnih namigov. . .

Nekoliko pametnejši pristop

Če malo bolje premislimo...

1. Določimo vse nabore, ki imajo 81 začetnih namigov, in, če najdemo dopustno uganko, določimo vse nabore, ki imajo 80 začetnih namigov, in če, najdemo dopustno uganko, določimo, vse nabore, ki imajo 79 začetnih namigov...

Pravzaprav lahko začnemo precej nižje od 81, saj je znanih veliko dopustnih ugank, ki imajo manj kot 81 začetnih namigov.

Nekoliko pametnejši pristop

Če malo bolje premislimo...

1. Določimo vse nabore, ki imajo 81 začetnih namigov, in, če najdemo dopustno uganko, določimo vse nabore, ki imajo 80 začetnih namigov, in če, najdemo dopustno uganko, določimo, vse nabore, ki imajo 79 začetnih namigov...

Pravzaprav lahko začnemo precej nižje od 81, saj je znanih veliko dopustnih ugank, ki imajo manj kot 81 začetnih namigov.

Dejansko so znane dopustne Sudoku uganke, ki imajo le 17 začetnih namigov.

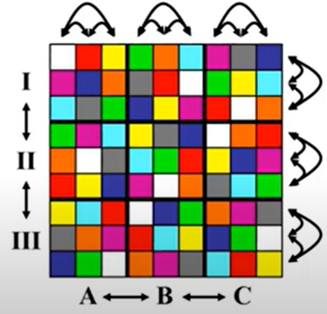
			8		1			
						4	3	
5								
				7		8		
						1		
	2			3				
6							7	5
		3	4					
			2			6		

Ekvivalentne Sudoku uganke

Sudoku tabeli/uganki sta **ekvivalentni**, če je mogoče eno pretvoriti v drugo s končnim zaporedjem naslednjih operacij:

1. Permutiranje vrstic in stolpcev vsakega pasu/sklada (X $3!^6$)
2. Permutiranje pasov I, II, in II, in skladov A, B, in C (X $3!^2$).
3. Permutiranje številk/barv (X $9!$)

Zgornje generira **Sudoku grupo** s 3.359.232 različnimi možnimi operacijami.



Koliko 9×9 Sudoku ugank obstaja?

Koliko 9×9 Sudoku ugank obstaja?

6.670.903.752.021.072.936.960

(6.7 *trilijard*)

Koliko 9×9 Sudoku ugank obstaja?

6.670.903.752.021.072.936.960

(6.7 *trilijard*)

Podrobnosti o izračunu najdete v:

Bertram Felgenhauer in Frazer Jarvis, *Enumerating Possible Sudoku Grids*, 2005.

Koliko 9×9 Sudoku ugank obstaja?

6.670.903.752.021.072.936.960

(6.7 *trilijard*)

Podrobnosti o izračunu najdete v:

Bertram Felgenhauer in Frazer Jarvis, *Enumerating Possible Sudoku Grids*, 2005.

Do ekvivalence natanko imamo:

5.472.730.538

(5.5 *milijard*)

Vprašanje: Kakšno je najmanjše število začetnih namigov v dopustni uganki?

Rešitev?

Vprašanje: Kakšno je najmanjše število začetnih namigov v dopustni uganki?

Rešitev?

1. januar 2012: McGuire, Tugemann, Civario, University College Dublin

Vprašanje: Kakšno je najmanjše število začetnih namigov v dopustni uganki?

Rešitev?

1. januar 2012: McGuire, Tugemann, Civario, University College Dublin

There is no 16-Clue Sudoku: Solving the Sudoku Minimum Number of Clues Problem.

Vprašanje: Kakšno je najmanjše število začetnih namigov v dopustni uganki?

Rešitev?

1. januar 2012: McGuire, Tugemann, Civario, University College Dublin

There is no 16-Clue Sudoku: Solving the Sudoku Minimum Number of Clues Problem.

V: Kako so prišli do odgovora?

Vprašanje: Kakšno je najmanjše število začetnih namigov v dopustni uganki?

Rešitev?

1. januar 2012: McGuire, Tugemann, Civario, University College Dublin

There is no 16-Clue Sudoku: Solving the Sudoku Minimum Number of Clues Problem.

V: Kako so prišli do odgovora?

O: Nekaj pametne matematike, nekaj zelo pametnega programiranja in ogromna količina računalniške moči:

Vprašanje: Kakšno je najmanjše število začetnih namigov v dopustni uganki?

Rešitev?

1. januar 2012: McGuire, Tugemann, Civario, University College Dublin

There is no 16-Clue Sudoku: Solving the Sudoku Minimum Number of Clues Problem.

V: Kako so prišli do odgovora?

O: Nekaj pametne matematike, nekaj zelo pametnega programiranja in ogromna količina računalniške moči:

7,1 milijonov jedrnih ur na superračunalniškem omeržju SGI Altix ICE 8200EX s 320 računalniki, od katerih ima vsak dva šestjedrna procesorja Intel Xeon E5650 in 24 GB pomnilnika RAM = približno 1 leto v realnem času = približno 1.000.000 evrov

Splošna strategija:

Splošna strategija:

1. Zgraditi katalog vseh 5.472.730.538 neekvivalentnih Sudoku ugank.

Splošna strategija:

1. Zgraditi katalog vseh 5.472.730.538 neekvivalentnih Sudoku ugank.

   To je naredil Glenn Fowler. Celotno naštevanje z zelo pametnim in specializirani algoritmom stiskanja.

   Nestisnjena velikost podatkov: 418 GB.

   Stisnjena velikost podatkov: 6 GB.

Splošna strategija:

1. Zgraditi katalog vseh 5.472.730.538 neekvivalentnih Sudoku ugank.

   To je naredil Glenn Fowler. Celotno naštevanje z zelo pametnim in specializirani algoritmom stiskanja.

   Nestisnjena velikost podatkov: 418 GB.

   Stisnjena velikost podatkov: 6 GB.

2. Na vsaki tabeli poiskati poduganke s 16 začetnimi namigi in vsako od njih preveriti, ali jo je mogoče enolično dopolniti do dopustne Sudoku tabele.

Splošna strategija:

1. Zgraditi katalog vseh 5.472.730.538 neekvivalentnih Sudoku ugank.

   To je naredil Glenn Fowler. Celotno naštevanje z zelo pametnim in specializirani algoritmom stiskanja.

   Nestisnjena velikost podatkov: 418 GB.

   Stisnjena velikost podatkov: 6 GB.

2. Na vsaki tabeli poiskati poduganke s 16 začetnimi namigi in vsako od njih preveriti, ali jo je mogoče enolično dopolniti do dopustne Sudoku tabele.

   PROBLEM: $\binom{81}{16} \approx 3.4 \cdot 10^{16} \approx$ število sekund od začetka življenja na Zemlji.

   Torej, McGuire in sodelavci so bili pametnejši glede tega, katere množice celic so gledali.

Opazimo:

Vsaka dopustna uganka mora vsebovati vsaj eno od rdečih številk.

9	3	7	8	**5**	6	2	4	1
5	6	2	1	**9**	4	3	8	7
4	8	1	2	7	3	5	6	9
8	2	3	6	4	7	9	1	5
6	1	5	9	3	2	4	7	8
7	4	9	5	8	1	6	2	3
3	7	8	4	6	9	1	5	2
1	9	6	7	2	5	8	3	4
2	5	4	3	1	8	7	9	6

Takšnemu naboru celic rečemo "neizogiben".

Pametnejša strategija za iskanje ugank s 16 celicami:

1. Za vsako izpolnjeno uganko poiščimo veliko neizogibnih naborov.
2. Določimo vse nabore s 16 celicami, ki zadenejo vsak neizogiben nabor vsaj enkrat.
3. Preverimo vsak nabor s 16 celicami, ali je to zares dopustna uganka.

Imamo "majhnen" problem: ali je to dokaz?

Imamo "majhnen" problem: ali je to dokaz?

Ni človeško preverljivo: izračun je prevelik.

Imamo "majhnen" problem: ali je to dokaz?

Ni človeško preverljivo: izračun je prevelik.

Dokler je naše razumevanje fizike dovolj natančno, da popolnoma predvidi obnašanje procesorja pri danem naboru navodil, je treba računanju verjeti...

Imamo "majhnen" problem: ali je to dokaz?

Ni človeško preverljivo: izračun je prevelik.

Dokler je naše razumevanje fizike dovolj natančno, da popolnoma predvidi obnašanje procesorja pri danem naboru navodil, je treba računanju verjeti. . .

. . . razen če je v njihovi kodi hrošč. . .

Imamo "majhnen" problem: ali je to dokaz?

Ni človeško preverljivo: izračun je prevelik.

Dokler je naše razumevanje fizike dovolj natančno, da popolnoma predvidi obnašanje procesorja pri danem naboru navodil, je treba računanju verjeti. . .

. . . razen če je v njihovi kodi hrošč. . .

...ali pa kozmični žarki pritekajo iz vesolja in izbijejo elektron z mesta v ravno pravem (napačnem?) trenutku. . .

Imamo "majhnen" problem: ali je to dokaz?

Ni človeško preverljivo: izračun je prevelik.

Dokler je naše razumevanje fizike dovolj natančno, da popolnoma predvidi obnašanje procesorja pri danem naboru navodil, je treba računanju verjeti. . .

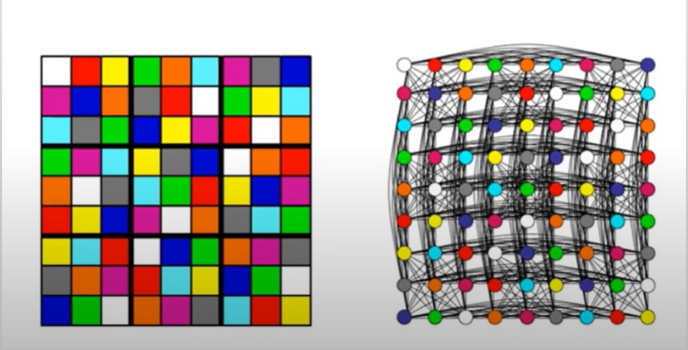
. . . razen če je v njihovi kodi hrošč. . .

...ali pa kozmični žarki pritekajo iz vesolja in izbijejo elektron z mesta v ravno pravem (napačnem?) trenutku. . .

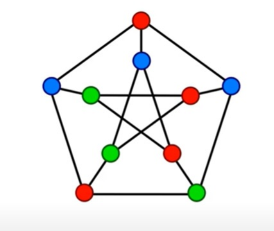
Ali so ta vprašanja res vredna skrbi ali so tako redka, da niso problem?

Kaj se da narediti?

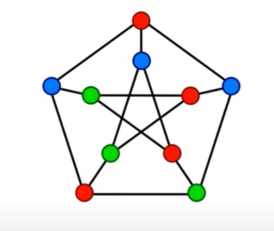
Definirajmo graf Sud_3 za nabor celic s polnim podgrafom v vsaki vrstici, stolpcu in bloku:



Kromatično število

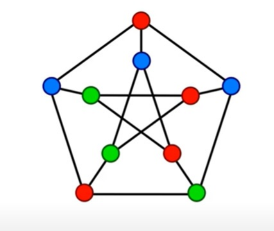


Kromatično število



Definicija: Graf G je k-**obarljiv**, če je mogoče vozlišča pobarvati s k barvami tako, da nobena povezava nima obeh točk obarvanih z isto barvo.

Kromatično število



Definicija: Graf G je k**-obarljiv**, če je mogoče vozlišča pobarvati s k barvami tako, da nobena povezava nima obeh točk obarvanih z isto barvo.

Definicija: **Kromatično število** $\chi(G)$ grafa G je najmanjše celo število k, da je G k-obarljiv.

Definicija: Za graf G in pravilno barvanje c z natanko $\chi(G)$ barvami je "določujoča množica" množica vozlišč, tako da lahko barvanje, omejeno na te točke, enolično dopolnimo do pravilnega barvanja celotne množice vozlišč grafa.
(Z drugimi besedami: **določujoča množica** vozlišč določa preostanek barvanja.)

Definicija: Za graf G in pravilno barvanje c z natanko $\chi(G)$ barvami je "določujoča množica" množica vozlišč, tako da lahko barvanje, omejeno na te točke, enolično dopolnimo do pravilnega barvanja celotne množice vozlišč grafa.
(Z drugimi besedami: **določujoča množica** vozlišč določa preostanek barvanja.)

Definicija: Za graf G in pravilno barvanje c z natanko $\chi(G)$ barvami je "kritična množica" takšna določujoča množica, da odstranitev poljubnega vozlišča iz nje povzroči, da le-ta ni več določujoča.
(Z drugimi besedami: **Kritična množica** je najmanjša določujoča množica vozlišč.)

Definicija: Za graf G in pravilno barvanje c z natanko $\chi(G)$ barvami je "določujoča množica" množica vozlišč, tako da lahko barvanje, omejeno na te točke, enolično dopolnimo do pravilnega barvanja celotne množice vozlišč grafa.
(Z drugimi besedami: **določujoča množica** vozlišč določa preostanek barvanja.)

Definicija: Za graf G in pravilno barvanje c z natanko $\chi(G)$ barvami je "kritična množica" takšna določujoča množica, da odstranitev poljubnega vozlišča iz nje povzroči, da le-ta ni več določujoča.
(Z drugimi besedami: **Kritična množica** je najmanjša določujoča množica vozlišč.)

Definicija: Za graf G in pravilno barvanje c z natanko $\chi(G)$ barvami je $scs(G; c)$ **velikost najmanjše kritične množice** za G in c.

Za graph G definiramo

$$\underline{scs}(G) = min\ scs(G; c) \quad \overline{scs}(G) = max\ scs(G; c)$$

Za graph G definiramo

$$\underline{scs}(G) = min\ scs(G; c) \quad \overline{scs}(G) = max\ scs(G; c)$$

Izrek

(McGuire in sodelavci, 2012)

$$\underline{scs}(Sud_3) = 17.$$

Za graph G definiramo

$$\underline{scs}(G) = min\ scs(G;c) \quad \overline{scs}(G) = max\ scs(G;c)$$

Izrek

(McGuire in sodelavci, 2012)

$$\underline{scs}(Sud_3) = 17.$$

Morda lahko z analizo teh parametrov sčasoma zgradimo (človeku berljiv) matematični dokaz tega rezultata.

Za graph G definiramo

$$\underline{scs}(G) = min\ scs(G;c) \quad \overline{scs}(G) = max\ scs(G;c)$$

Izrek

(McGuire in sodelavci, 2012)

$$\underline{scs}(Sud_3) = 17.$$

Morda lahko z analizo teh parametrov sčasoma zgradimo (človeku berljiv) matematični dokaz tega rezultata.

Izrek

(C. Kirkpatrick, 2013) Za sodo število n velja

$$\underline{scs}(C_n) = \overline{scs}(C_n) = 1.$$

Nekateri od teh parametrov (z drugimi imeni) so bili že preučeni v drugih kontekstih, zlasti za latinske kvadrate.

Nekateri od teh parametrov (z drugimi imeni) so bili že preučeni v drugih kontekstih, zlasti za latinske kvadrate.

Definicija: Latinski kvadrat reda n je $n \times n$ matrika, katere celice so zapolnjene s številkami $1, 2, \ldots n$, tako da se vsako število pojavi le enkrat v vsaki vrstici in le enkrat v vsakem stolpcu.

Nekateri od teh parametrov (z drugimi imeni) so bili že preučeni v drugih kontekstih, zlasti za latinske kvadrate.

Definicija: **Latinski kvadrat** reda n je $n \times n$ matrika, katere celice so zapolnjene s številkami $1, 2, \ldots n$, tako da se vsako število pojavi le enkrat v vsaki vrstici in le enkrat v vsakem stolpcu.

Definicija: Graf latinskega kvadrata reda n je kartezični produkt

$$K_n \times K_n$$

dveh polnih grafov na n vozliščih.

Nekateri od teh parametrov (z drugimi imeni) so bili že preučeni v drugih kontekstih, zlasti za latinske kvadrate.

Definicija: **Latinski kvadrat** reda n je $n \times n$ matrika, katere celice so zapolnjene s številkami $1, 2, \ldots n$, tako da se vsako število pojavi le enkrat v vsaki vrstici in le enkrat v vsakem stolpcu.

Definicija: Graf latinskega kvadrata reda n je kartezični produkt

$$K_n \times K_n$$

dveh polnih grafov na n vozliščih.

Izrek

(Cavenagh, 2007)

$$\underline{scs}(K_n \times K_n) \geq n(\log(n))^{\frac{1}{3}}.$$

Izrek

(Hatami-Qian, 2018)

$$\underline{scs}(K_n \times K_n) \geq \frac{n^2}{1000}.$$

Izrek

(Hatami-Qian, 2018)

$$\underline{scs}(K_n \times K_n) \geq \frac{n^2}{1000}.$$

Izrek

(Bate-Van Rees, 1979; Cooper-Donovan-Seberry, 1991)

$$\underline{scs}(K_n \times K_n) \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor.$$

2. Sudoku in matrike

$$S = \begin{pmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} & \dots & S_{1,9} \\ S_{2,1} & S_{2,2} & \dots & S_{2,9} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{9,1} & S_{9,2} & \dots & S_{9,9} \end{pmatrix}$$

2. Sudoku in matrike

$$S = \begin{pmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} & \dots & S_{1,9} \\ S_{2,1} & S_{2,2} & \dots & S_{2,9} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{9,1} & S_{9,2} & \dots & S_{9,9} \end{pmatrix}$$

Merciadri Luca, 2011.

1. Determinanta matrike S, ki jo tvorijo elementi polnega Sudokuja, lahko znaša 0.

$$\begin{vmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 & 1 & 4 & 9 & 8 & 2 \\ 9 & 2 & 1 & 3 & 6 & 8 & 7 & 5 & 4 \\ 5 & 8 & 4 & 7 & 9 & 2 & 1 & 3 & 6 \\ 8 & 9 & 6 & 2 & 3 & 7 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 9 & 4 & 6 & 3 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 7 & 1 & 8 & 5 & 2 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & 2 & 8 & 7 & 1 & 6 & 9 & 3 \\ 1 & 6 & 9 & 4 & 5 & 3 & 8 & 2 & 7 \\ 7 & 3 & 8 & 6 & 2 & 9 & 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

O veljavnosti Sudokujeve matrike ni mogoče biti prepričani samo z izračunom njene determinante.

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \color{red}{1} & \color{red}{2} & \color{red}{3} & \color{red}{4} & \color{red}{5} & \color{red}{6} & \color{red}{7} & \color{red}{8} & \color{red}{9} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

O veljavnosti Sudokujeve matrike ni mogoče biti prepričani samo z izračunom njene determinante.

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 6 & 5 & 4 & 3 & 7 & 9 & 8 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \neq 0,$$

O veljavnosti Sudokujeve matrike ni mogoče biti prepričani samo z izračunom njene determinante.

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \color{red}{1} & \color{red}{2} & \color{red}{3} & \color{red}{4} & \color{red}{5} & \color{red}{6} & \color{red}{7} & \color{red}{8} & \color{red}{9} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \color{red}{1} & \color{red}{2} & 6 & 5 & 4 & 3 & \color{red}{7} & 9 & 8 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \neq 0,$$

2. Sled Sudokujeve matrike ni konstantna.

$$P = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 & 1 & 4 & 9 & 8 & 2 \\ 9 & 2 & 1 & 3 & 6 & 8 & 7 & 5 & 4 \\ 5 & 8 & 4 & 7 & 9 & 2 & 1 & 3 & 6 \\ 8 & 9 & 6 & 2 & 3 & 7 & 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 9 & 4 & 6 & 3 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 7 & 1 & 8 & 5 & 2 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & 2 & 8 & 7 & 1 & 6 & 9 & 3 \\ 1 & 6 & 9 & 4 & 5 & 3 & 8 & 2 & 7 \\ 7 & 3 & 8 & 6 & 2 & 9 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 9 & 8 & 5 \\ 6 & 5 & 8 & 1 & 9 & 3 & 7 & 2 & 4 \\ 8 & 9 & 5 & 6 & 4 & 2 & 3 & 7 & 1 \\ 7 & 6 & 4 & 9 & 3 & 1 & 2 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 7 & 5 & 4 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 9 & 7 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 1 & 9 & 8 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 8 & 4 & 6 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

Velja $\det(P) = 32$ in $\det(B) = 44$.

3. Transponirana Sudokujeva matrika je še vedno veljavna, ampak gre za drugačno Sudokujevo matriko.

3. Transponirana Sudokujeva matrika je še vedno veljavna, ampak gre za drugačno Sudokujevo matriko.

						6		3
		9		4				
5	8			7	3			1
		6	7	2		4		
		5	4	3	6	1	7	
7		3		8	1			
			2	9	4		8	
9	6					5		
	2		8			3		

4. Simetrične Sudoku matrike ne obstajajo ($S = S^T$).

4. Simetrične Sudoku matrike ne obstajajo ($S = S^T$).

   V tem primeru, $S_{1,2} = S_{2,1}$, kar ni možno, ker sta elementa v istem bloku.

4. Simetrične Sudoku matrike ne obstajajo ($S = S^T$).

   V tem primeru, $S_{1,2} = S_{2,1}$, kar ni možno, ker sta elementa v istem bloku.

5. Če je $\det(S) = 0$, matrika S ni ortogonalna ($S \cdot S^T = I$.)

4. Simetrične Sudoku matrike ne obstajajo ($S = S^T$).

   V tem primeru, $S_{1,2} = S_{2,1}$, kar ni možno, ker sta elementa v istem bloku.

5. Če je $\det(S) = 0$, matrika S ni ortogonalna ($S \cdot S^T = I$.)

   Dokaz:

$$1 = \det(I_9) = \det(S^T \cdot S) = \det(S^T) \cdot \det(S) = 0.$$

4. Simetrične Sudoku matrike ne obstajajo ($S = S^T$).

   V tem primeru, $S_{1,2} = S_{2,1}$, kar ni možno, ker sta elementa v istem bloku.

5. Če je $\det(S) = 0$, matrika S ni ortogonalna ($S \cdot S^T = I$.)

   Dokaz:

$$1 = \det(I_9) = \det(S^T \cdot S) = \det(S^T) \cdot \det(S) = 0.$$

6. Normalna Sudoku matrika ne obstaja ($S \cdot S^T = S^T \cdot S$.)

5

Zabavna dejstva

Dr. House rešuje Sudoku.

Zabavna dejstva

- Guinnessov svetovni rekord za najhitrejše reševanje Sudokuja je manj kot minuto in pol.

Zabavna dejstva

- Guinnessov svetovni rekord za najhitrejše reševanje Sudokuja je manj kot minuto in pol.
- Leta 2010 je bila uganka Sudoku, ki jo je ustvaril finski matematik Arto Inkala, s strani Guinnessove knjige rekordov prepoznana kot "najtežja Sudoku uganka na svetu". Ekipa petih ljudi je potrebovala več kot mesec dni, da je rešila uganko.

Zabavna dejstva

- Guinnessov svetovni rekord za najhitrejše reševanje Sudokuja je manj kot minuto in pol.
- Leta 2010 je bila uganka Sudoku, ki jo je ustvaril finski matematik Arto Inkala, s strani Guinnessove knjige rekordov prepoznana kot "najtežja Sudoku uganka na svetu". Ekipa petih ljudi je potrebovala več kot mesec dni, da je rešila uganko.
- British Airways svojim stevardesam absolutno prepoveduje reševanje ugank Sudoku med vzletom ali pristankom.

Zabavna dejstva

- Guinnessov svetovni rekord za najhitrejše reševanje Sudokuja je manj kot minuto in pol.
- Leta 2010 je bila uganka Sudoku, ki jo je ustvaril finski matematik Arto Inkala, s strani Guinnessove knjige rekordov prepoznana kot "najtežja Sudoku uganka na svetu". Ekipa petih ljudi je potrebovala več kot mesec dni, da je rešila uganko.
- British Airways svojim stevardesam absolutno prepoveduje reševanje ugank Sudoku med vzletom ali pristankom.
- Prodaja svinčnikov v Veliki Britaniji je po letu 2005 zaradi fenomena Sudoku poskočila za 700 odstotkov.

Zabavna dejstva

- Guinnessov svetovni rekord za najhitrejše reševanje Sudokuja je manj kot minuto in pol.
- Leta 2010 je bila uganka Sudoku, ki jo je ustvaril finski matematik Arto Inkala, s strani Guinnessove knjige rekordov prepoznana kot "najtežja Sudoku uganka na svetu". Ekipa petih ljudi je potrebovala več kot mesec dni, da je rešila uganko.
- British Airways svojim stevardesam absolutno prepoveduje reševanje ugank Sudoku med vzletom ali pristankom.
- Prodaja svinčnikov v Veliki Britaniji je po letu 2005 zaradi fenomena Sudoku poskočila za 700 odstotkov.
- V Avstraliji je leta 2008 zaradi Sudokuja propadlo sojenje preprodajalcem drog, ker je vseh 12 članov porote, namesto da bi poslušalo, kaj imajo povedati odvetniki, obtoženi in sodnik, zrlo v papir s kvadratki.

Najlepša Hvala!