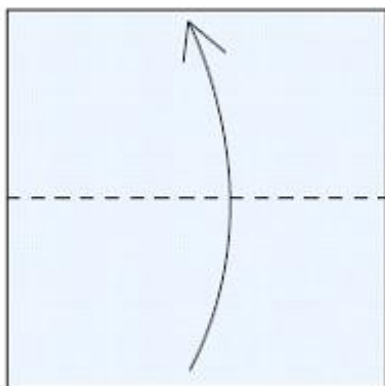


ORIGAMI!

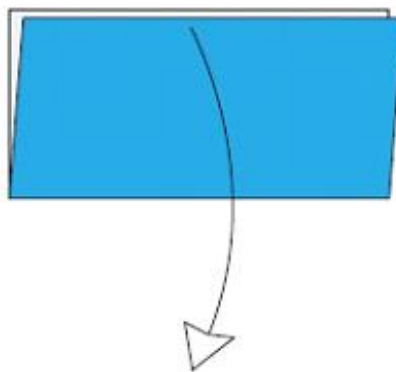
ori = "prepogibati", *kami* = "papir"

Začetki: Japonska 7 stoletje.

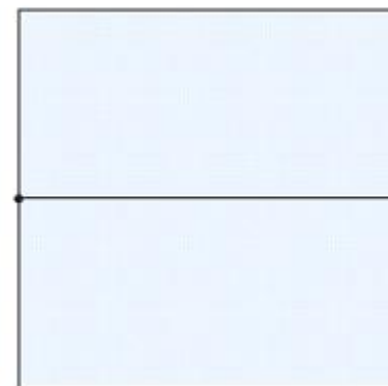
Osnovno pravilo origamija



1. Prepogni spodnji rob na zgornji rob

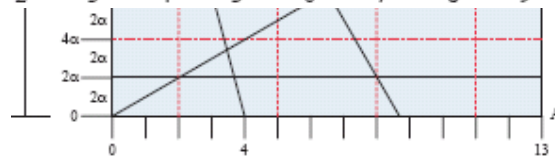
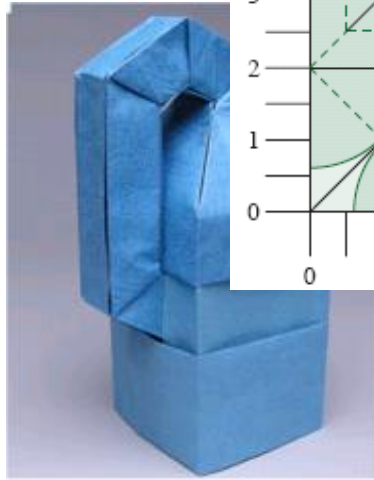
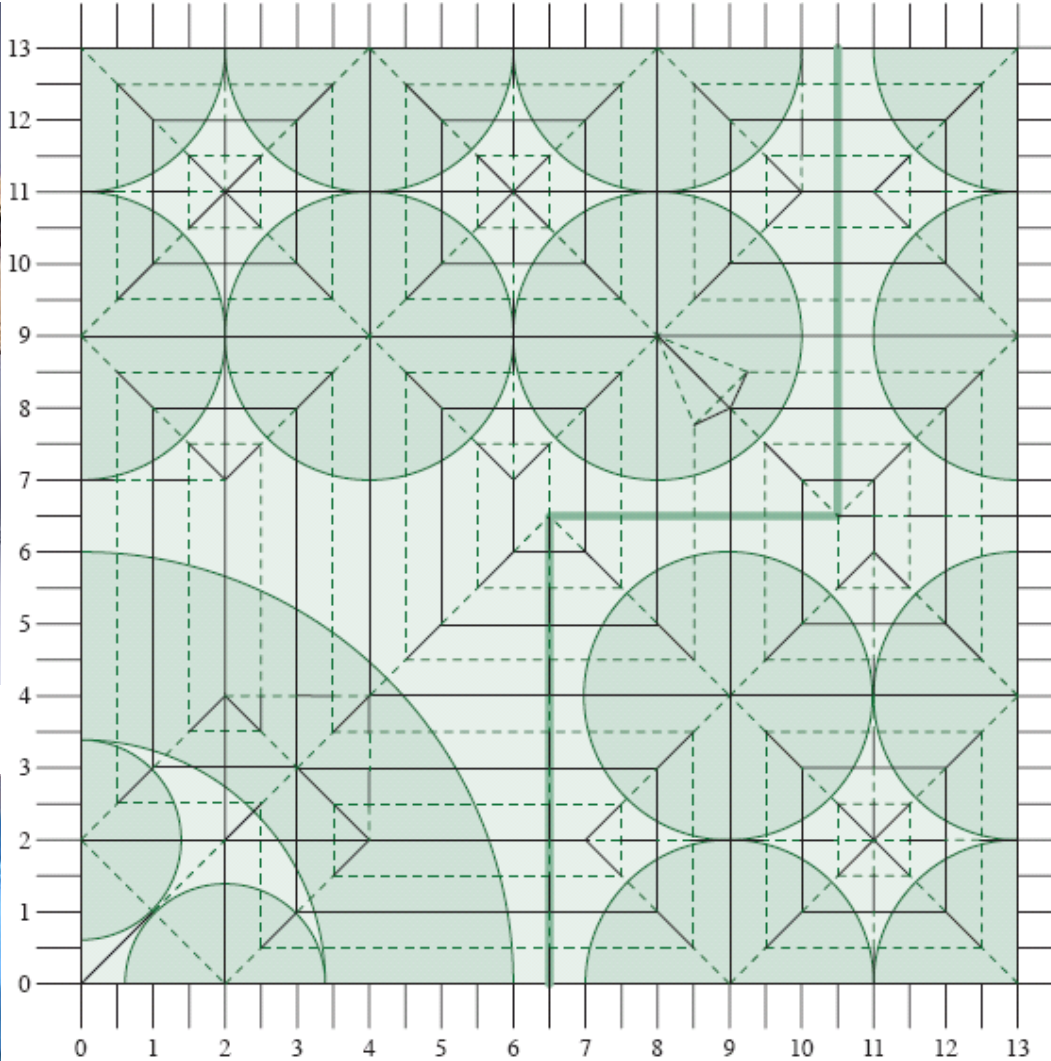


2. razgri



3. Nov pregib določa dve novi točki

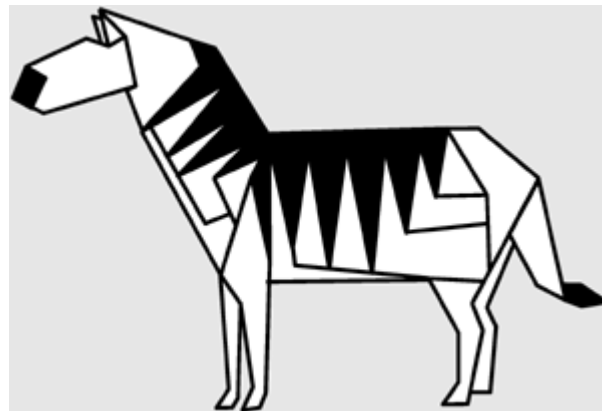
ORIGAMI



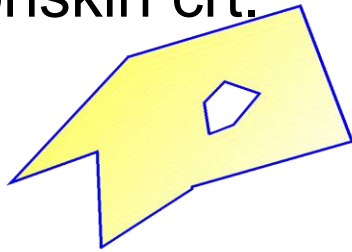
ORIGAMI

Kaj vse lahko konstruiramo z origamijem?

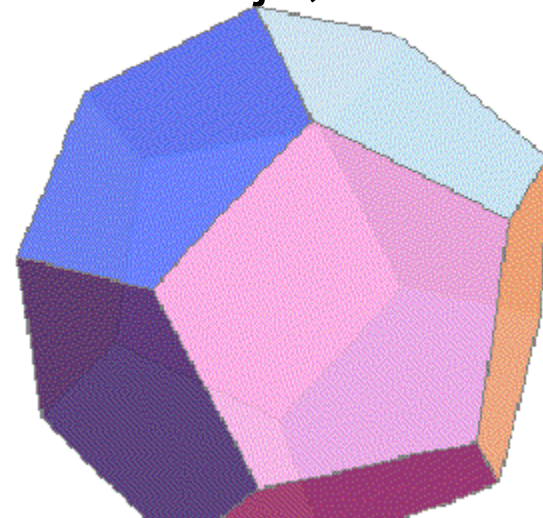
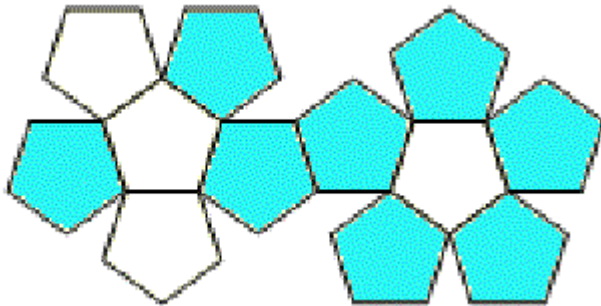
Izrek (M. Demaine, J. Mitchell, E. Demaine, 2000). Bodi P poljuben povezan (lahko tudi nekonveksen) polieder, ki ima vsako lice pobarvano z eno izmed dveh barv. Tedaj lahko zgubamo dvobarvni kvadratni kos papirja tako, da se bo zgubil natanko na polieder P , in se bo pri tem na vsakem licu pokazala predpisana barva papirja.



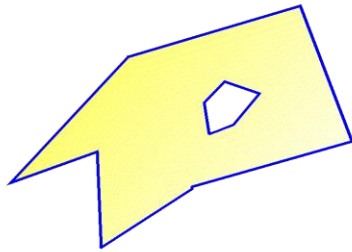
•**Definicija.** *Poligonsko območje* je povezan ravninski lik, katerega rob je disjunktna unija enostavno sklenjenih poligonskih črt.



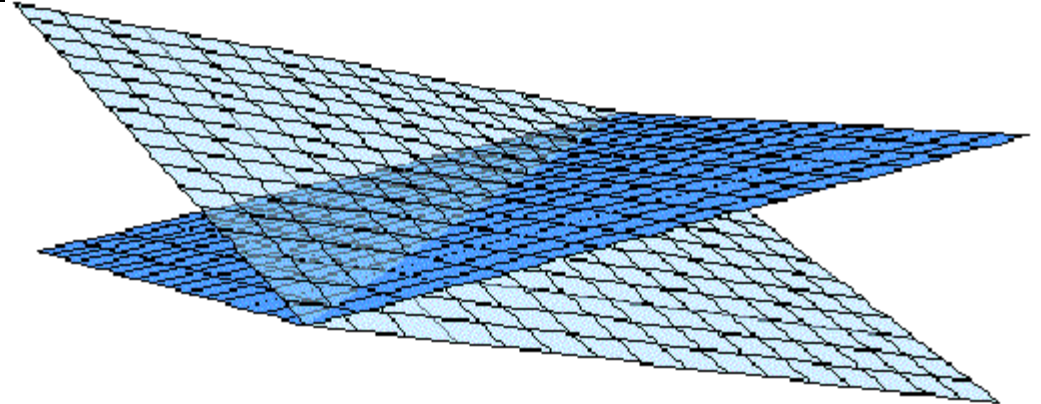
•**Definicija.** *Polieder P* je povezana unija končno mnogo poligonskih območij s paroma disjunktne notranjostmi. Vsako poligonsko območje, ki sestavlja *P*, imenujemo *lice*.



- **Definicija.** *Poligonsko območje* je povezan ravninski lik, katerega rob je poligonska črta.



- **Definicija.** *Polieder P* je povezana unija končno mnogo poligonskih območij s paroma disjunktnimi notranjostmi. Vsako poligonsko območje, ki sestavlja P , imenujemo *lice*.

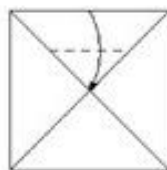


Kaj vse lahko konstruiramo z origamijem?

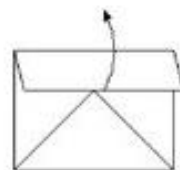
•Hiperbolični paraboloid (Demain, Demain, Lubiw 1999)



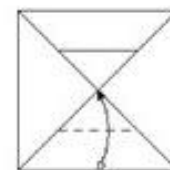
Crease the diagonals



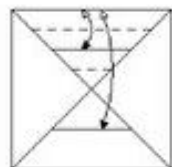
Fold the top edge to the center point, creasing only between the diagonals



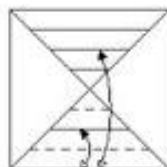
Unfold



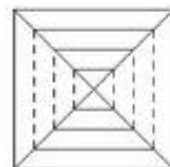
Repeat on the bottom (fold and unfold)



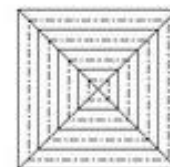
Fold and unfold on 1/4 and 3/4 marks



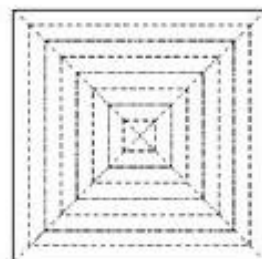
Repeat on the bottom



Repeat on left and right sides



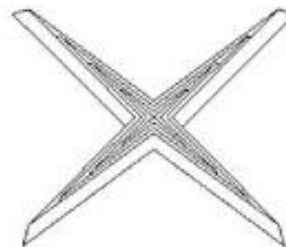
Turn over, and crease in between the squares in the opposite direction



Final crease pattern

--- Valley fold

..... Mountain fold



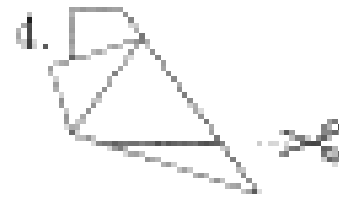
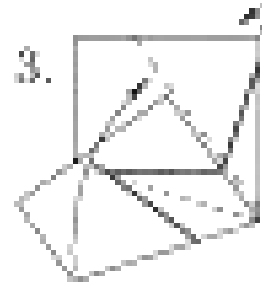
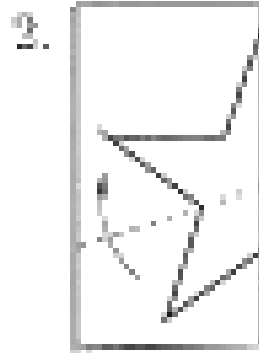
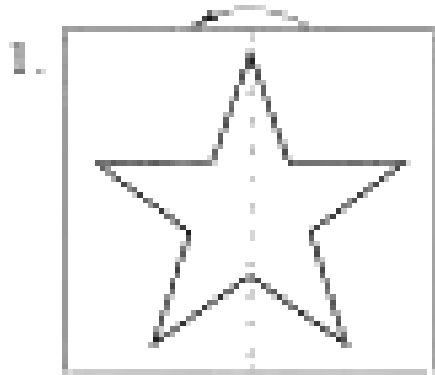
Folding the crease pattern completely forms an "X" shape

Partially opening it forms a hyper

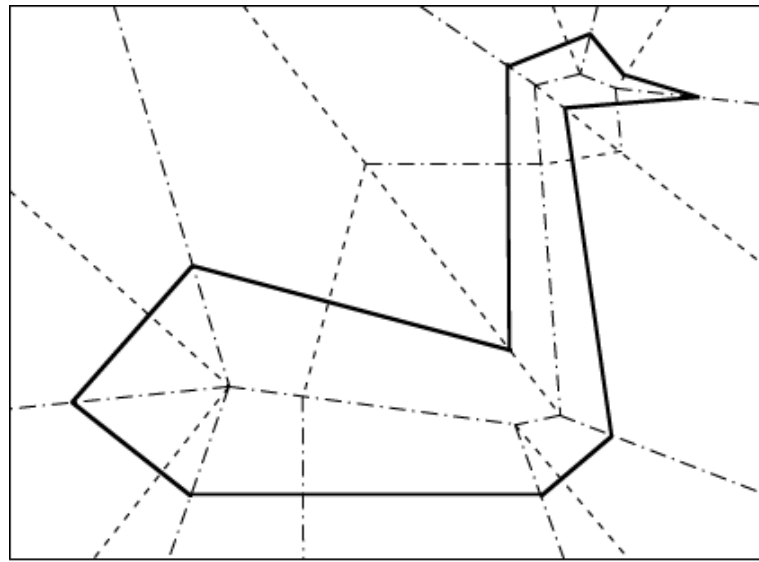


Prepogni in izreži:

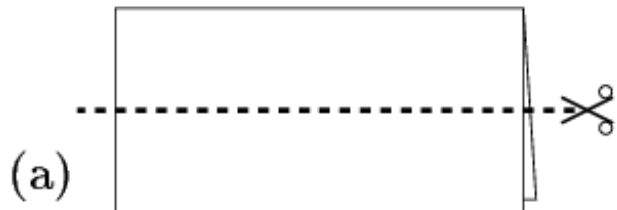
5 delna zvezda



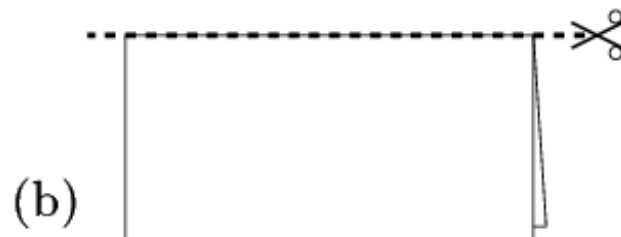
Labod



•Prepogni in izreži:



rez z škarjami

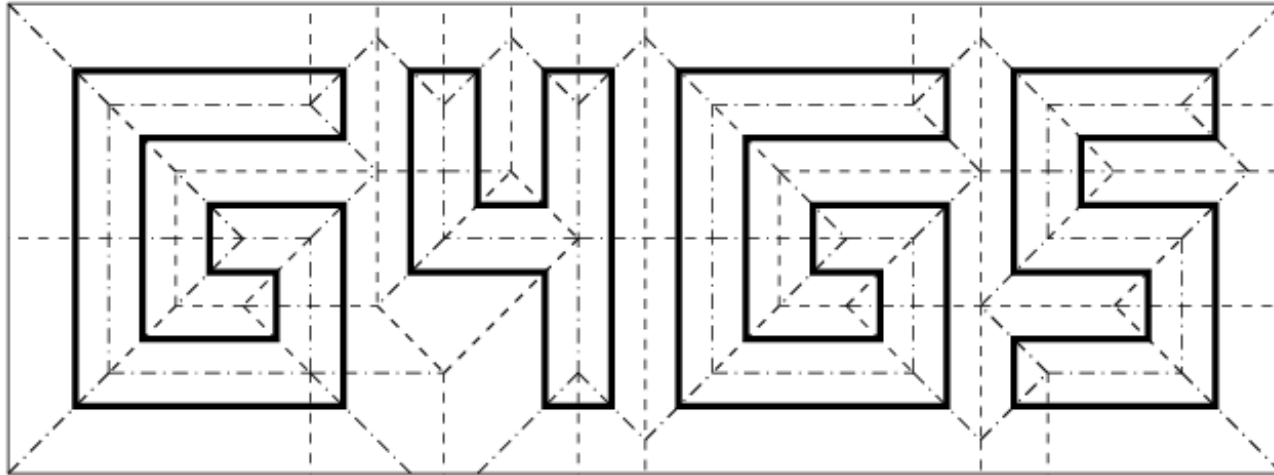


matematični rez

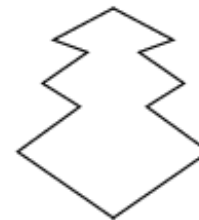
Izrek (E. D. Demaine, M. L. Demaine, A. Lubiw 1999). Bodi G poljuben ravninski graf (lahko tudi nepovezan) na kvadratu. Denimo še, da so oglišča v G povezana zgolj z daljicami.

Tedaj lahko v končno mnogo korakov zgubamo kvadrat tako, da z matematičnim rezom vzdolž ene same premice odstranimo natanko vse povezave grafa G in čisto nič drugega več.

•Prepogni in izreži:

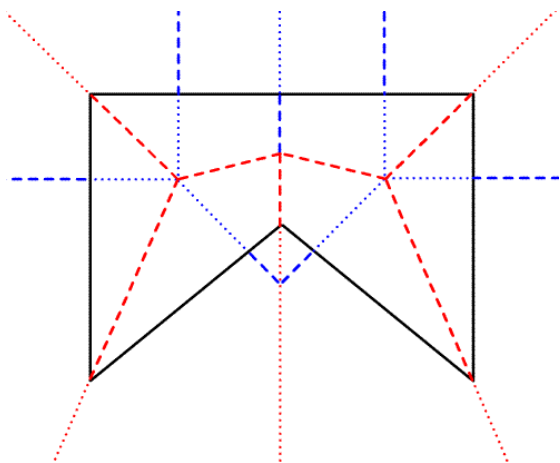
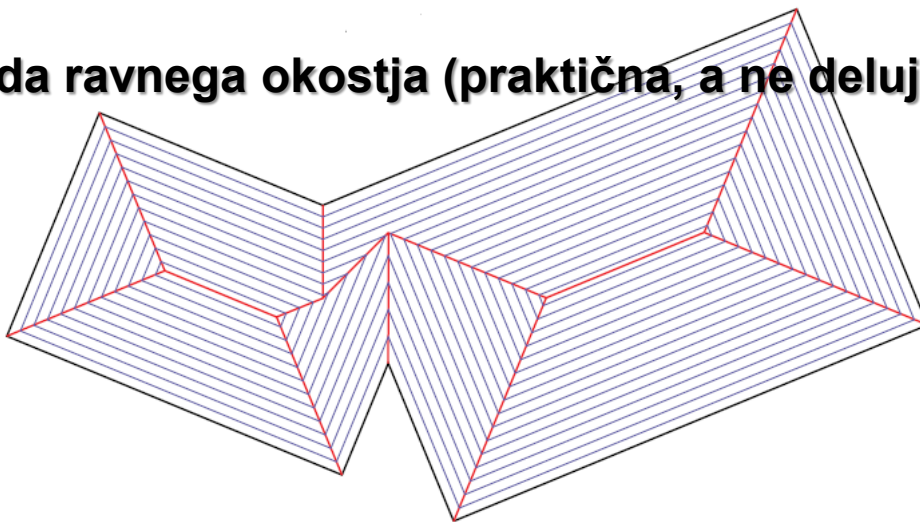


Kan-Chu-Sen (1721): Izreži “sangaibisi”



SKICA DOKAZA:

- **Metoda ravnega okostja (praktična, a ne deluje vedno)**

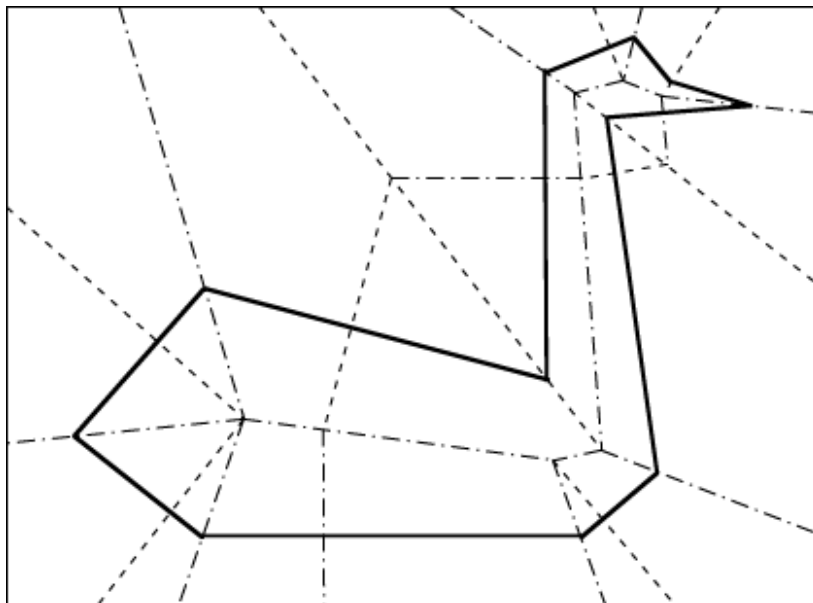


Ko najdemo ravno okostje ne dobimo ravninski origami!

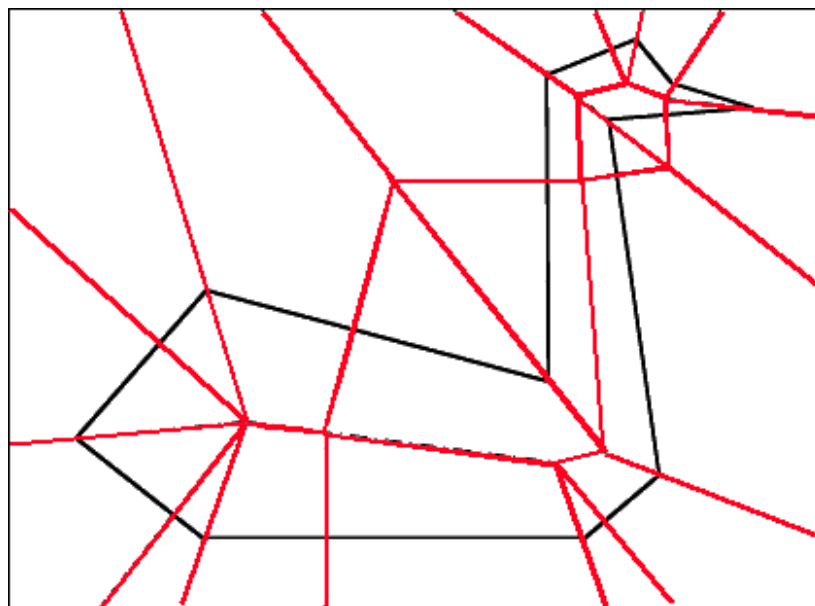
Dodati moramo še **pravokotnice** iz vsake stranice ki se zrcalijo na **ravnem okostju**

- **Metoda vložnih krogov (vedno deluje, a je zahtevna....)**

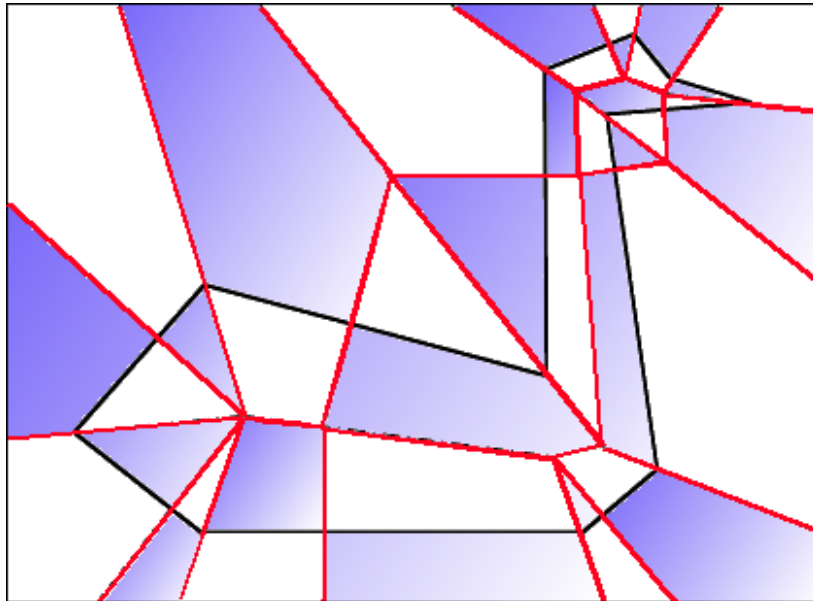
- **Vzorec gub in barvanje zemljevidov**



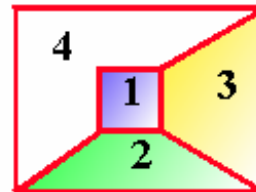
- **Vzorec gub in barvanje zemljevidov**



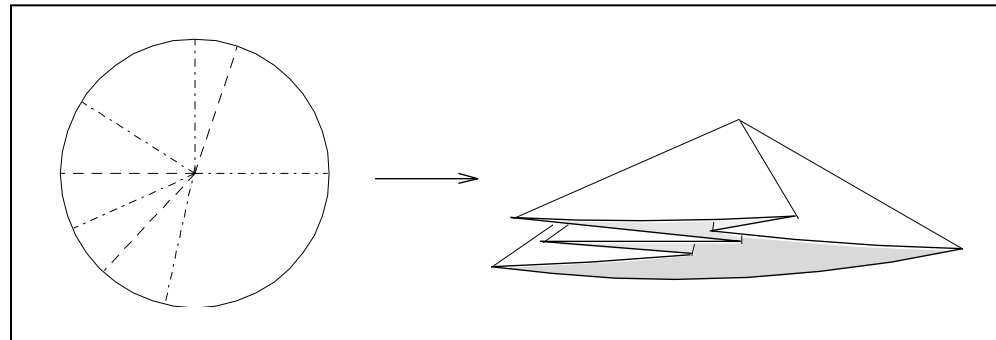
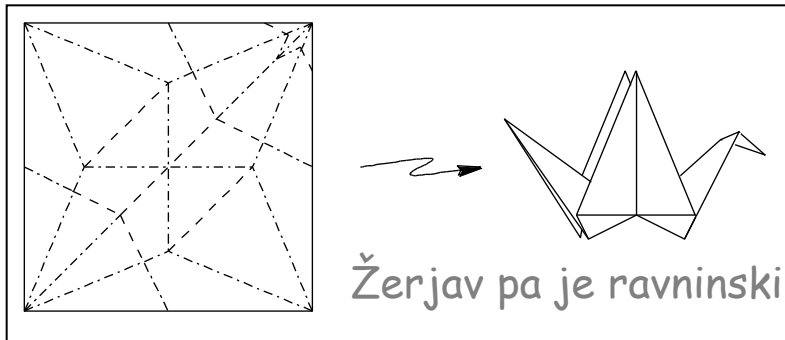
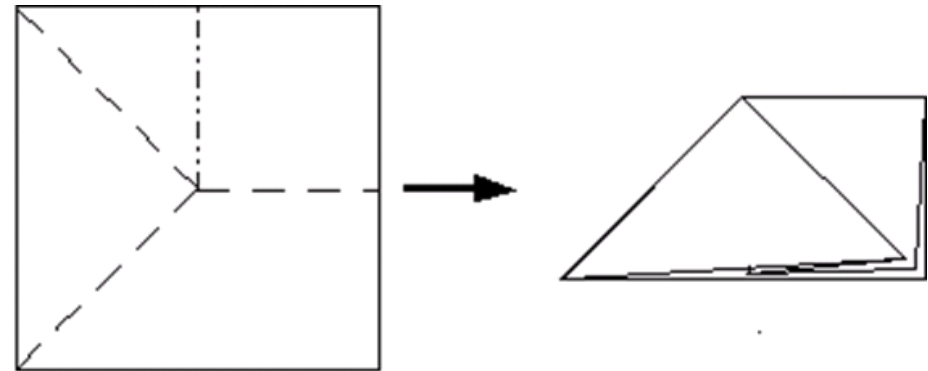
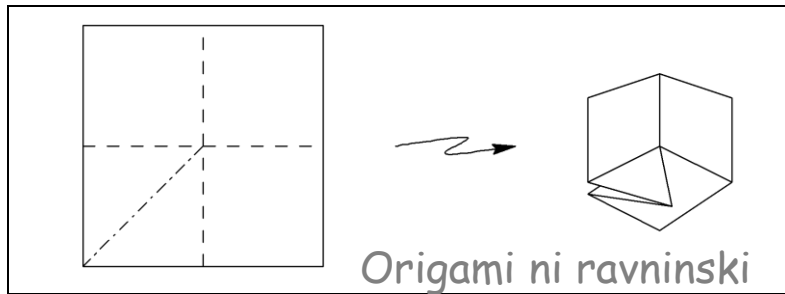
• Vzorec gub in barvanje zemljevidov



Za pobarvanje poljubnega zemljevida v \mathbb{R}^2 rabimo vsaj 4 barve.

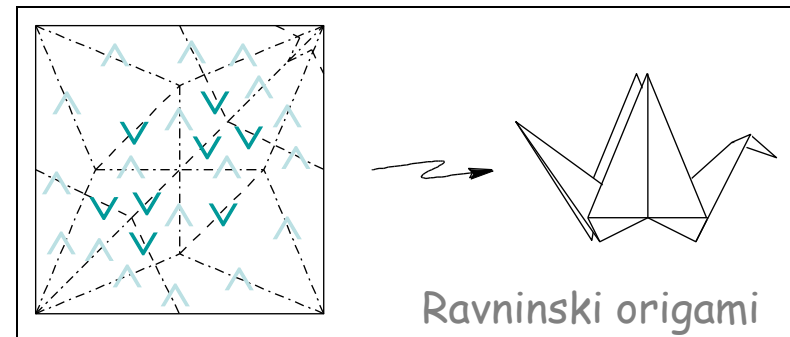
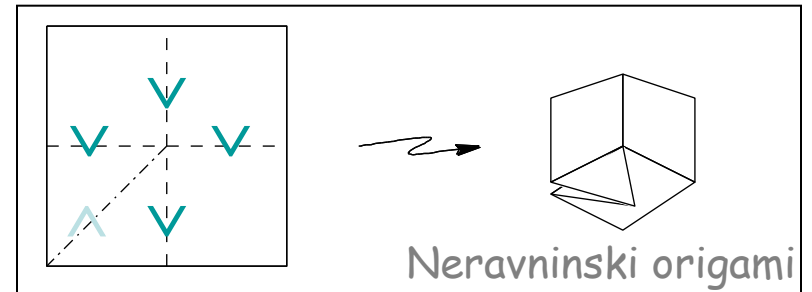


•Ravninski origami



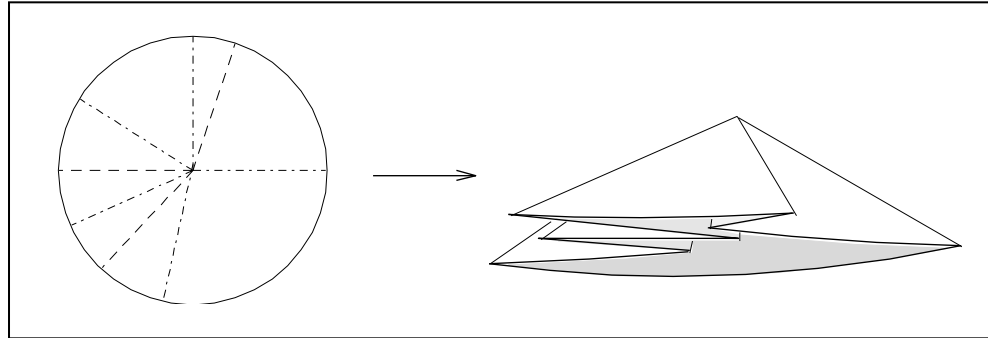
Struktura pregibov

- **Hrib** \wedge
- **Dolina** \vee



ORIGAMI

•Kdaj je origami z enim samim ogliščem ravninski ?



Izrek (Maekawa) Če je origami z enim samim ogliščem ravninski, je
 $|\# \text{ hrib} - \# \text{ dolina}| = 2$

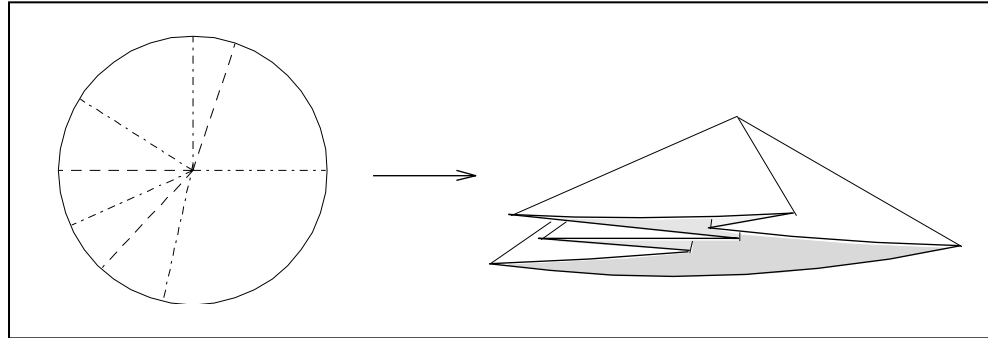
DOKAZ. Mravlja gre na obhod.

$$\text{hrib} = 180^\circ, \text{ dolina} = -180^\circ$$

$$\pm 360^\circ = 180^\circ \times (\# \text{ hribov}) - 180^\circ \times (\# \text{ dolin})$$

ORIGAMI

•Kdaj je origami z enim samim ogliščem ravninski ?

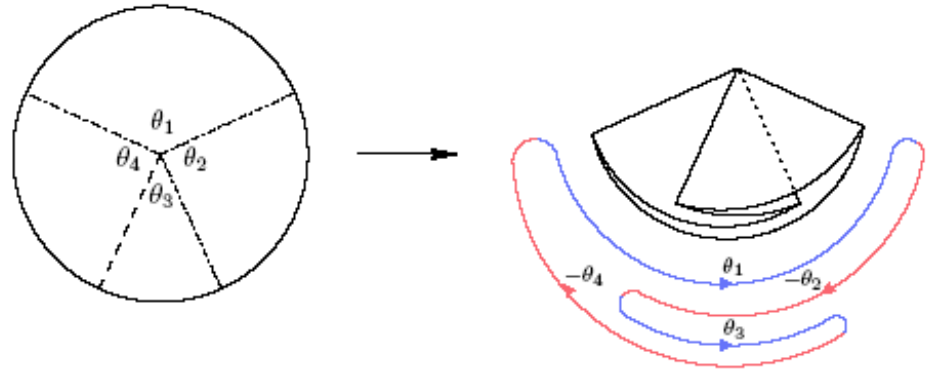


Posledica. Če je origami z enim samim ogliščem ravninski, je število daljic sodo.

$$\begin{aligned} \text{DOKAZ Število daljic} &= (\# \text{ hribov}) + (\# \text{ dolin}) \\ &= (\# \text{ hribov}) + (\# \text{ hribov} + 2) \end{aligned}$$

ORIGAMI

•Kdaj je origami z enim samim ogliščem ravninski ?



Izrek (Kawasaki). Origami z enim samim ogliščem je ravninski natanko tedaj, ko:

iz oglišča poteka sodo mnogo daljic, koti med njimi pa ustrezajo

$$\Theta_1 + \Theta_3 + \dots + \Theta_{n-1} = \Theta_2 + \Theta_4 + \dots + \Theta_n$$

DOKAZ:

–Mravljinina senca pri obhodu okoli tega oglišča naredi pot

$$\Theta_1 - \Theta_2 + \Theta_3 - \Theta_4 + \dots + \Theta_{n-1} - \Theta_n$$

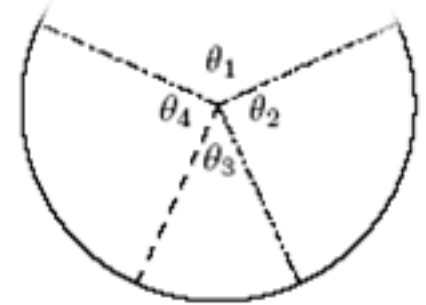
–Vrne se na izhodišče \Rightarrow vsota = 0

ORIGAMI

•Kdaj je origami z enim samim ogliščem ravninski ?

DOKAZ (v obratno smer):

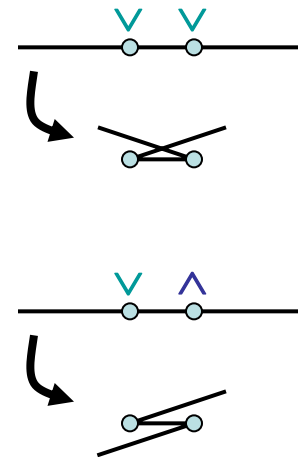
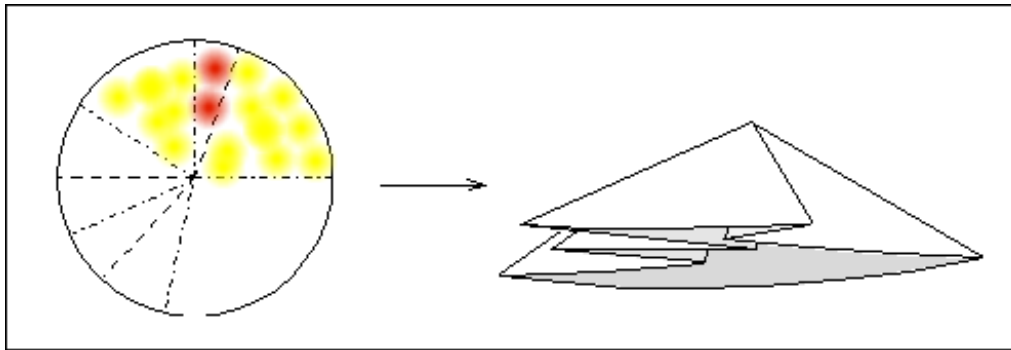
- S škarjami izrežimo največji kot, Θ_1 .
- Ostane nam še $n-2$ prepogibov
- Prepogibamo jih v obliki harmonike (hrib-dolina-hrib-...)
- Pridemo do kota $-\Theta_2 + \Theta_3 - \Theta_4 + \dots + \Theta_{n-1} - \Theta_n$, kar je zaradi
$$\Theta_1 + \Theta_3 + \dots + \Theta_{n-1} = \Theta_2 + \Theta_4 + \dots + \Theta_n$$
ravno enako $-\Theta_1$
- Sedaj samo še ponovno zlepimo odrezani kot.



ORIGAMI

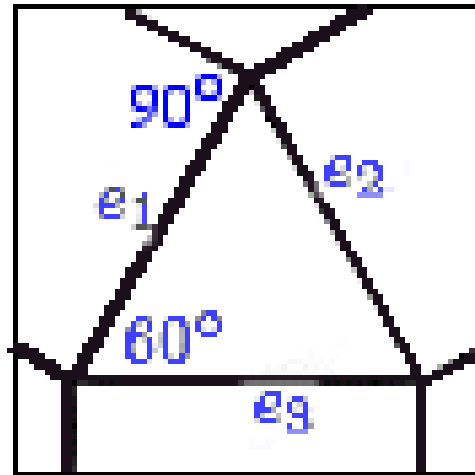
Lema. (Kawasaki-Justin za ravninske origamije):
Če je nek kot manjši kot njegova sosedka, se morata robova tega kota zgubati v različnih smereh.

➤ **Drugače bi se večja kota zaletela.**



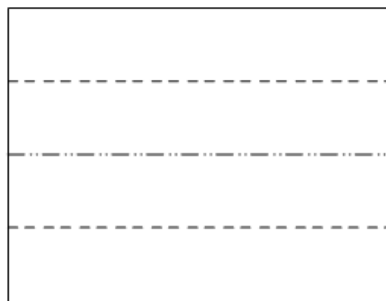
ORIGAMI

•Origami, ki je samo lokalno ravninski, a ni globalno



- Dokaz.
- ★ $\angle(e_1, e_2) = 60^\circ < 90^\circ$, torej se eden od e_1, e_2 zguba v hrib, drugi v dolino.
 - ★ Podobno velja za e_2 in e_3 ter za e_3 in e_1 —protislovje.

ORIGAMI (Koryo Miura zlaganje zemljevida)

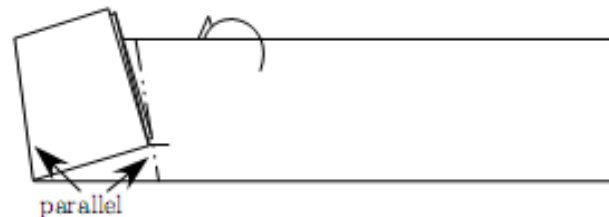


Naredi oznake na $\frac{1}{2}$ in $\frac{1}{4}$ kakor prikazano

Kos papirja zgubaj v hramoniko na $\frac{1}{4}$ dolžine

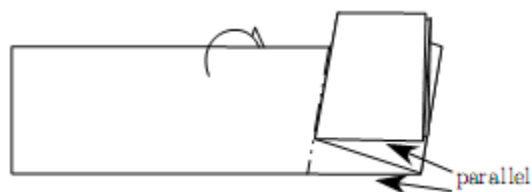


Prepogni VSE plasti tako da spodnji kot preneseš na $\frac{1}{4}$ oznake

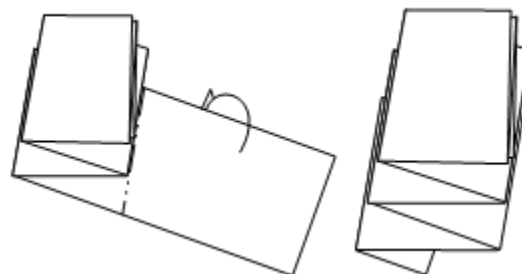


Prepogni preostanek v drugo smer nazaj, da dobiš rob vzporeden prejšnjemu

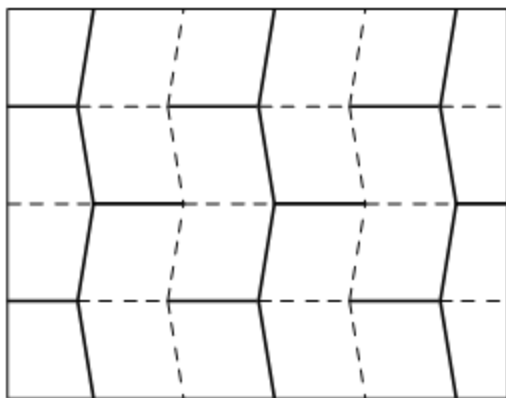
ORIGAMI (Koryo Miura zlaganje zemljevida)



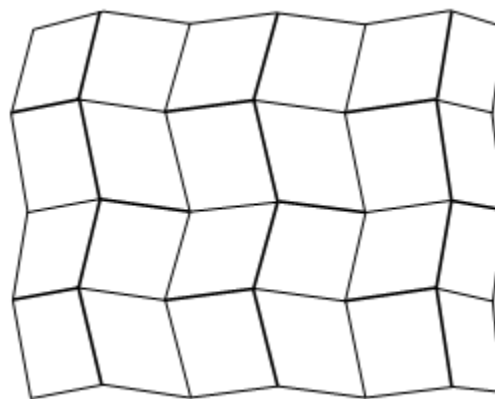
Ponovi, le da tokrat uporabiš prvi prepogib kot vodilo.



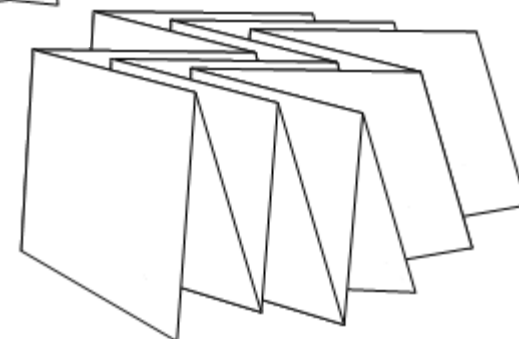
Ponavljaj dokler gre.



— mountain
- - - valley

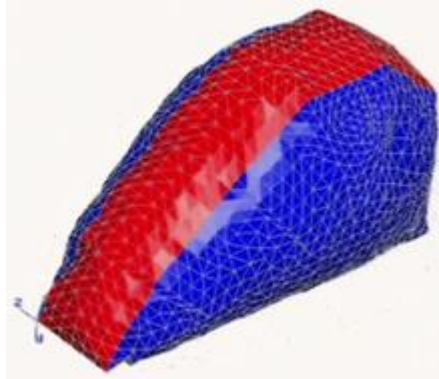
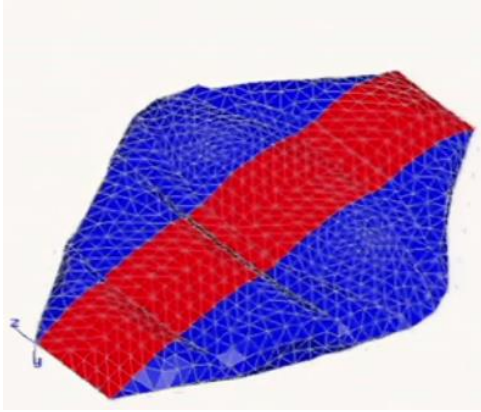


Razgrni. Dobiš vzorec kot zgoraj.
Nato nekatere hribe spremeniš v doline
in obratno.

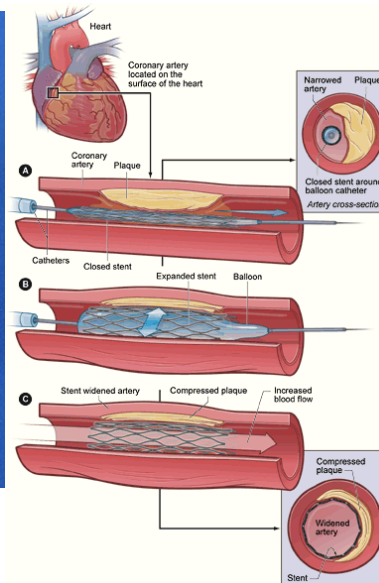


ORIGAMI-UPORABA

Zračne blazine (v avtomobilih)



Stent (krvni strdki)

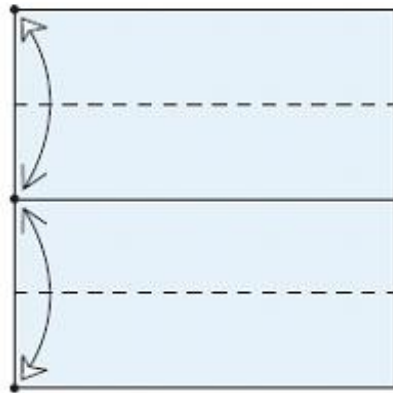


Vesoljski teleskopi

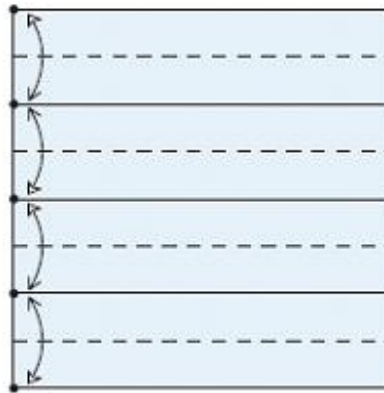


ORIGAMI-RAČUNANJE

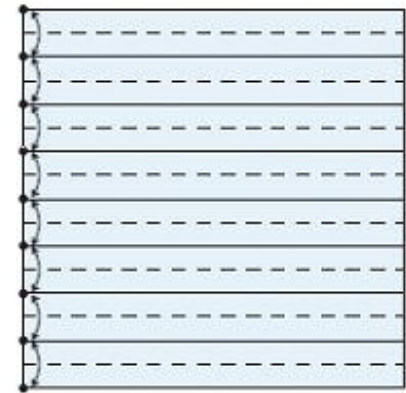
Z origamijem preprosto razpolavljamo dolžine



Razdelitev na 4 dele

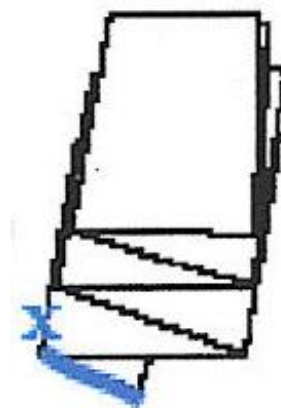
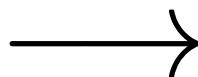
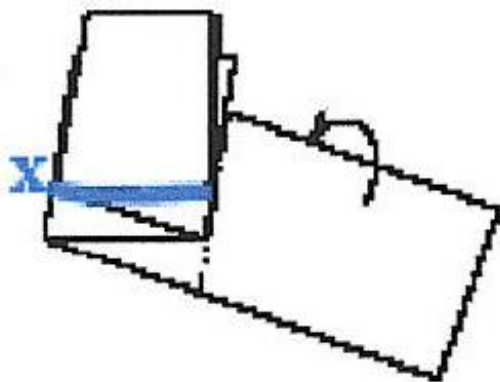


Razdelitev na 8 delov



Razdelitev na 16 delov

Z origamijem preprosto podvajamo dolžine



Lahko pa tudi konstruiramo ulomke dane dolžine (konstrukcija odkril Kazuo Haga)

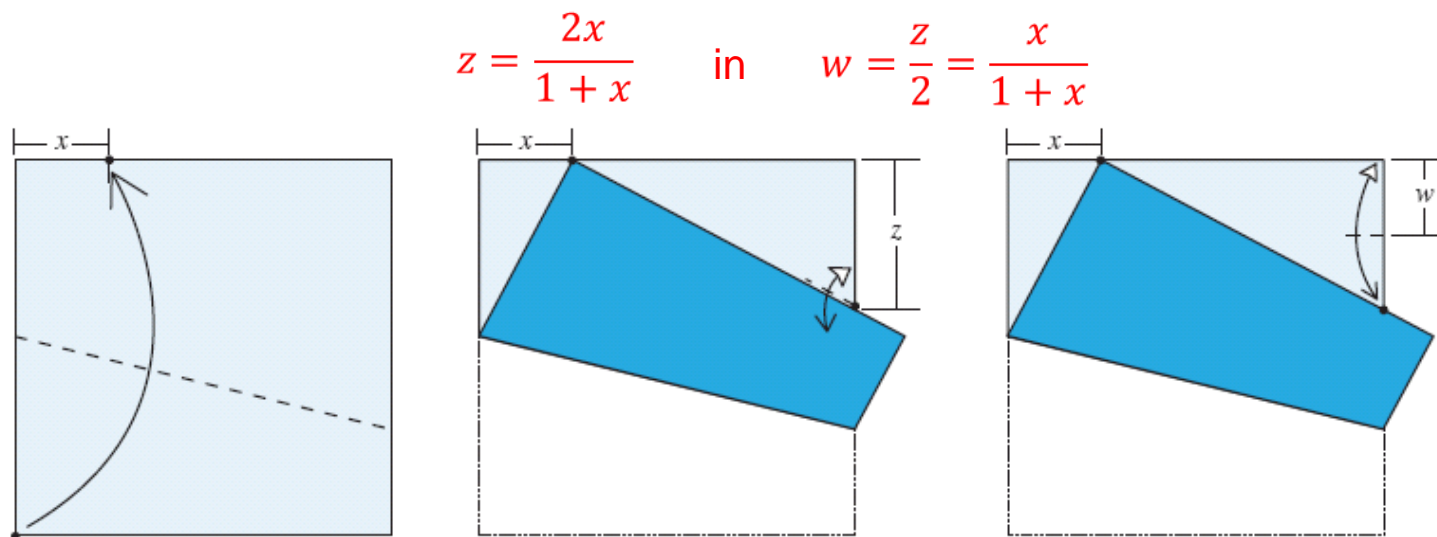


Figure 15. Schematic of the general Haga construction.

Kako konstruirati poljubni ulomek $\frac{a}{b}$?

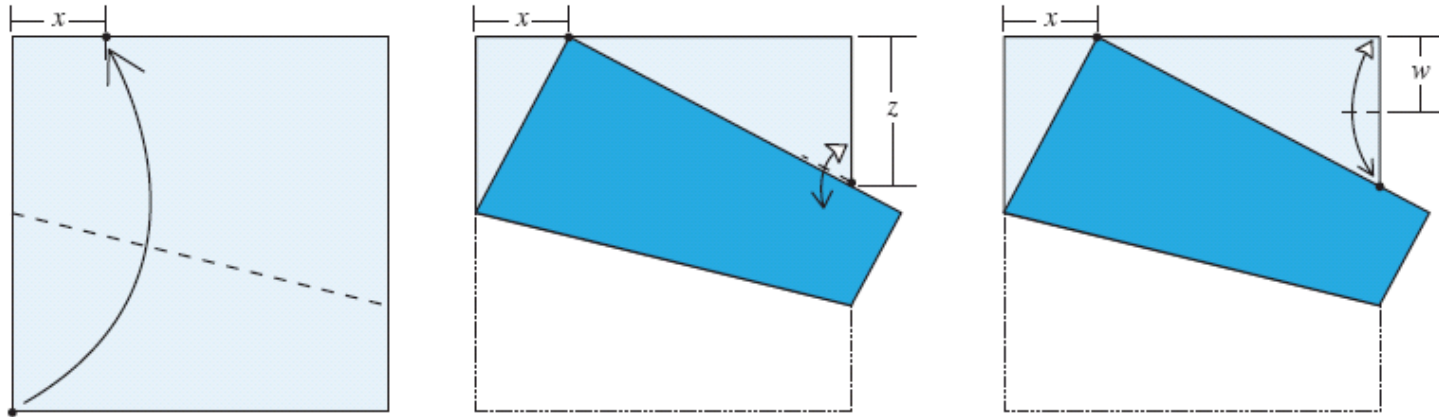
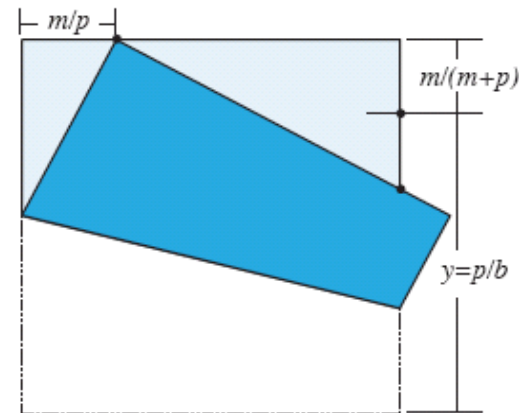
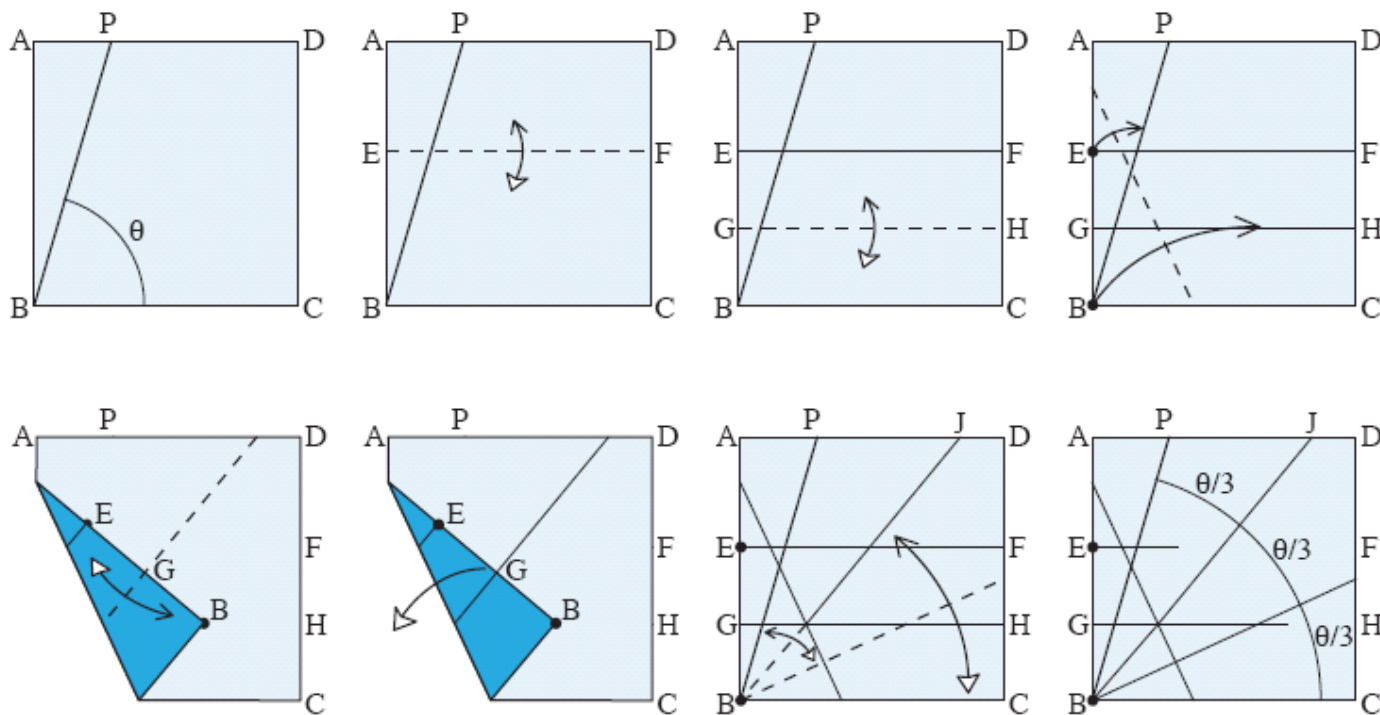


Figure 15. Schematic of the general Haga construction.

- Poišči število n , da bo $p := 2^n \leq b < 2^{n+1}$
- Bodi $m := \frac{b}{p} = \frac{b}{2^n}$
- Z razpolavljanjem poišči $\hat{x} := \frac{1}{2^n}$
- S harmoniko dobiš $x := \frac{b-2^n}{2^n} = \frac{b}{2^n} - 1$
- S pomočjo Haga konstrukcije poišči $w = \frac{x}{1+x} = \frac{b-2^n}{b}$
- Število $1 - w = \frac{2^n}{b}$ razpolavljaljaj, da prideš do $\frac{1}{b}$.
- S harmoniko dobiš ulomek $\frac{a}{b}$.

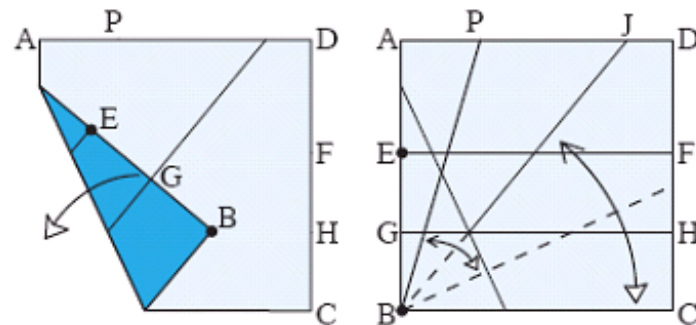


Lahko pa tudi naredimo nekaj, kar se ne da z ravnilom in šestilom...



Trisekcija kota z origamijem (Tsune Abe)

Dokaz, da smo res dobili $1/3$ kota:



✓ Daljica $G'B' = GB = B'D$ (zakaj?)

✓ Daljica $GS = SG'$ in $BS = SB'$

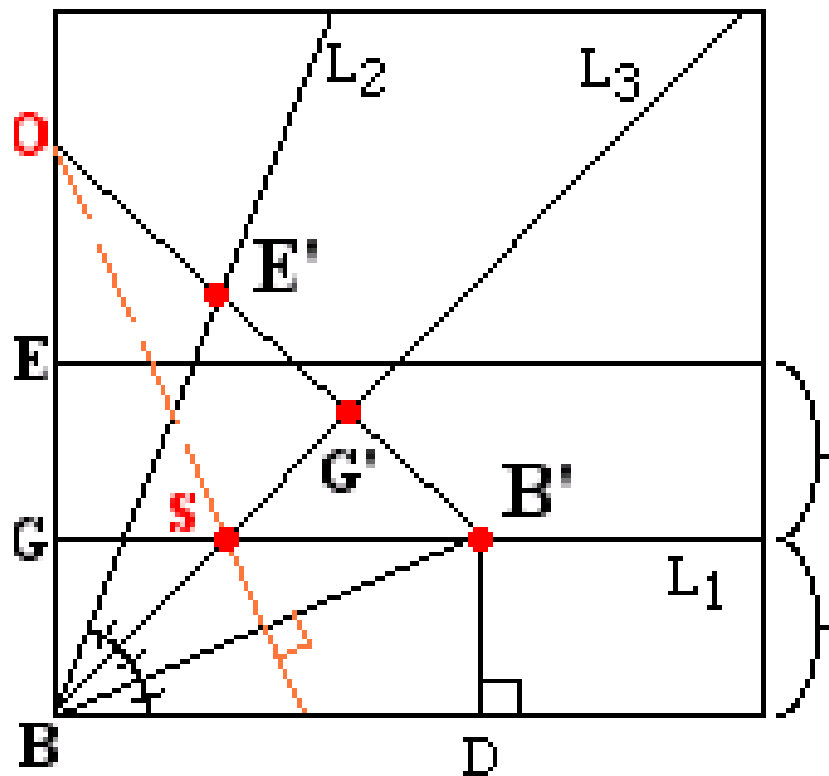
✓ Sledi, da trikotnik $GSB = G'SB'$

✓ Torej kot $GSB = G'SB'$, in s tem kot $BSG' = 180^\circ$ oziroma, točka S leži na daljici BG' .

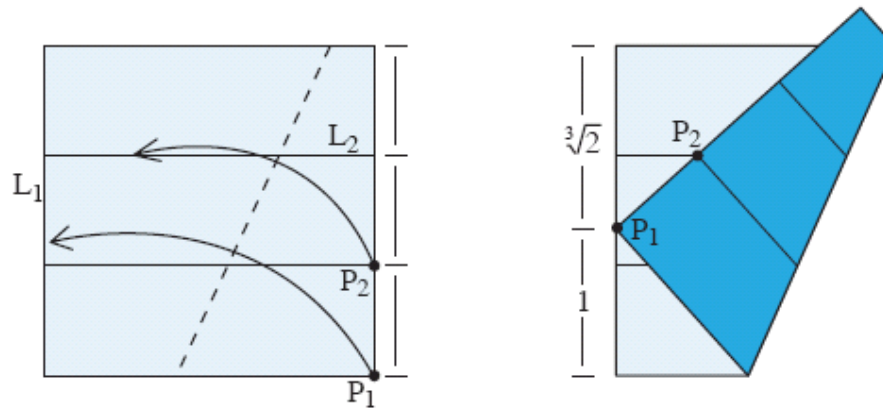
✓ Kot $SG'B' = SGB = 90^\circ = BG'B'$

✓ Sledi, da trikotnik $E'BG' = G'BB' = B'BD$ (zakaj?)

✓ Torej so koti $E'BG$, $G'BB'$, $B'BD$ enaki.



In še nekaj lahko naredimo, kar se tudi ne da z ravnilom in šestilom...



Podvojitev kocke z origamijem oziroma: $\sqrt[3]{2}$ (Peter Messer)

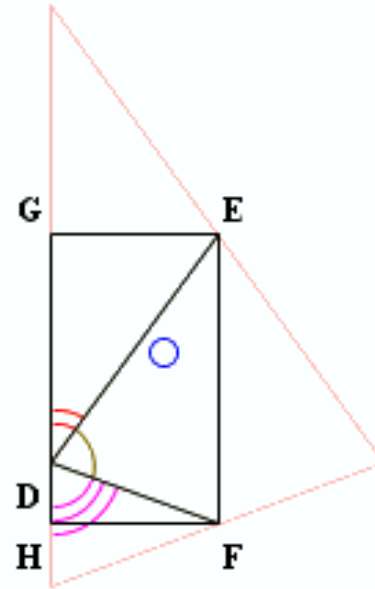
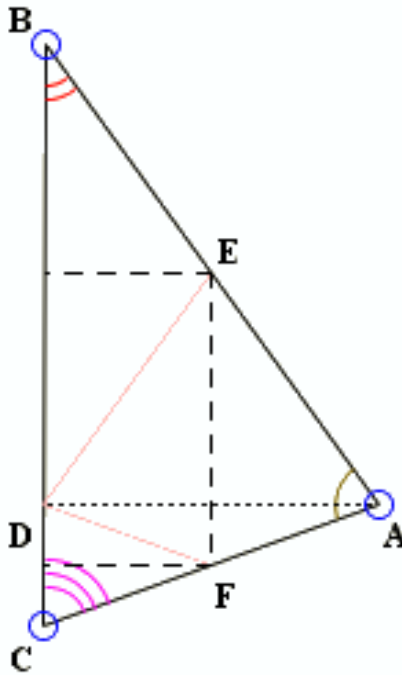
Še nekaj rezultatov

DOKAZOVANJE Z ORIGAMIJEM

IZREK : *Vsota kotov v trikotniku je 180°*

DOKAZOVANJE Z ORIGAMIJEM

IZREK : *Vsota kotov v trikotniku je 180°*



DOKAZ

- ❖ Bodi A oglišče ki ustreza največjemu kotu v trikotniku.
- ❖ Prepognemo skozi A, da C leži na daljici BC (axiom 05) –dobimo D... višino na A.
- ❖ Prepognemo – vzdolž daljice EF -- da točka A pride na točko D.
- ❖ Po konstrukciji EF razpolavlja višino AD. Poleg tega je $AD \perp BC$ in $EF \perp AD$, torej EF vzporednica BC.
- ❖ EF je torej razpolovišče trikotnika ABC, zato E razpolavlja daljico BA, F razpolavlja CA.
- ❖ Torej $|ED| = |EA| = |EB|$, zato: Če prepognemo skozi E, pride B v D. Podobno za F.

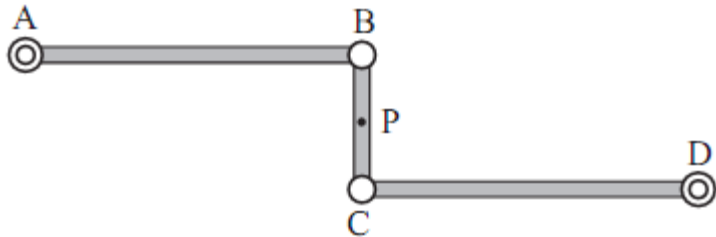
DOKAZOVANJE Z ORIGAMIJEM

IZREK $\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3) = \pi.$

ORIGAMI S SKLOPI (linkages)

Osnovni problem industrijske revolucije:

Naredi napravo, ki bo paralelno gibanje (gibanja bata)
spremenila v krožno gibanje (gibanje koles)



James Watt 1784 (približno paralelno)

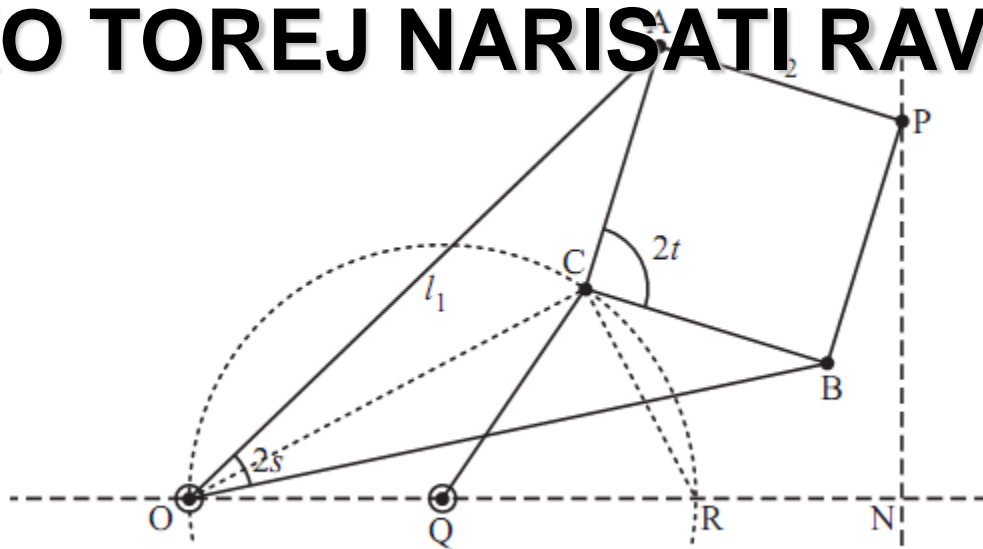
➤ James Watt (pismo Matthew Boultonu)

[a]lthough I am not over anxious after fame, yet I am more proud of the parallel motion than of any other invention I have ever made.

ORIGAMI S SKLOPI (linkages)

Prvi ki reši problem (v ravnini) je Peaucellier 1864

KAKO TOREJ NARISATI RAVNO ČRTO??



- Peaucellierov sklop.
- ★ $OA = OB = l_1$
 - ★ $AP = BP = AC = BC = l_2$
 - ★ $OQ = QC$

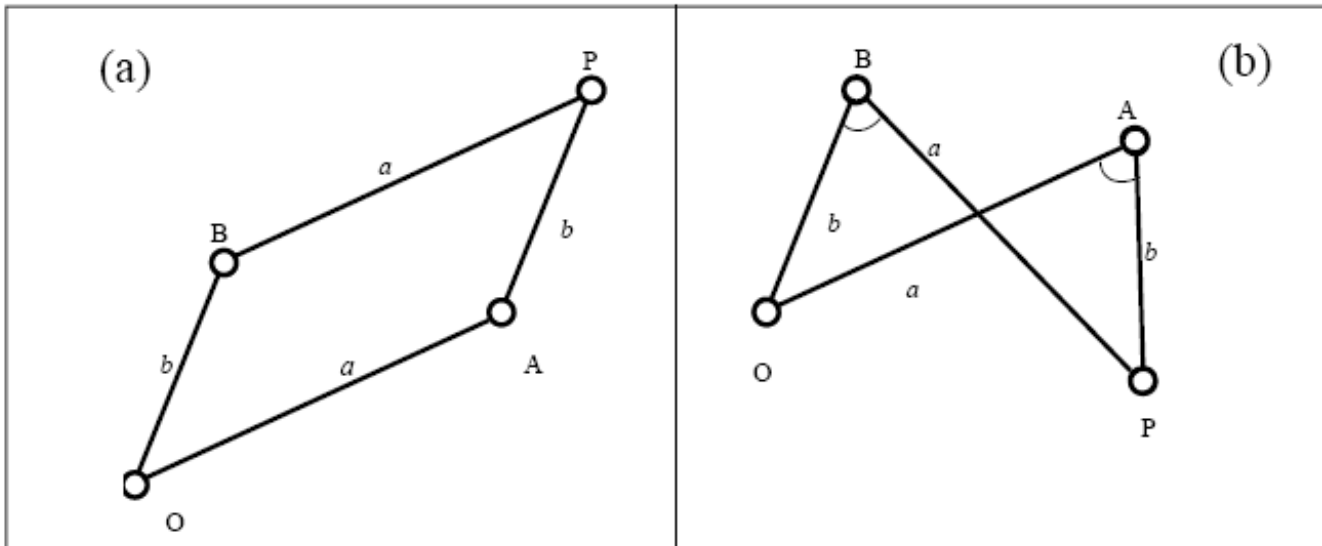
ORIGAMI S SKLOPI

Univerzalnostni rezultat: Obstaja ravninski sklop, ki iziše naše ime. Npr:

Erik

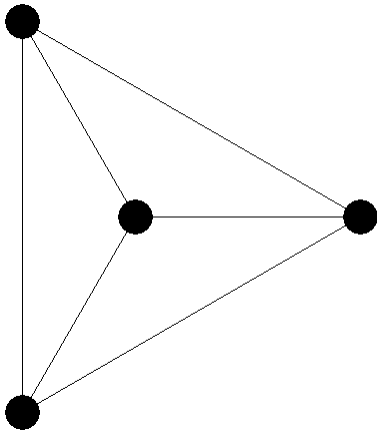
Natančneje

Izrek (Kempe). Bodi $f(x,y)$ polinom. Tedaj obstaja ravninski sklop, ki ga sestavljajo zgolj paralelogrami in antiparalelogrami, ki sledi krivulji $f(x,y)=0$.

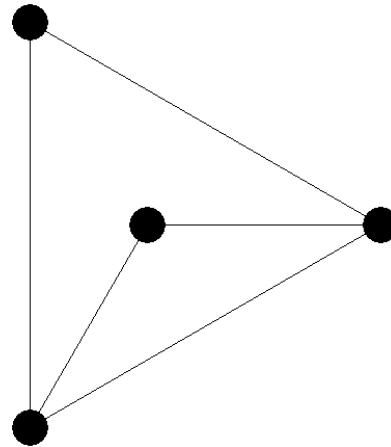


ORIGAMI S SKLOPI

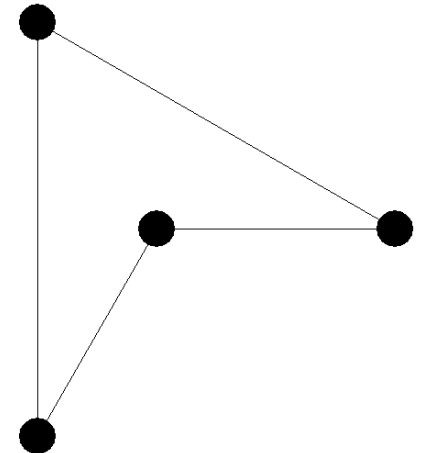
Vprašanje rigidnosti: Ali je dani spoj fiksni ali pa lahko spreminja obliko?



Fiksen v 2D
Fiksen v 3D



Fiksen v 2D
Gibljev v 3D

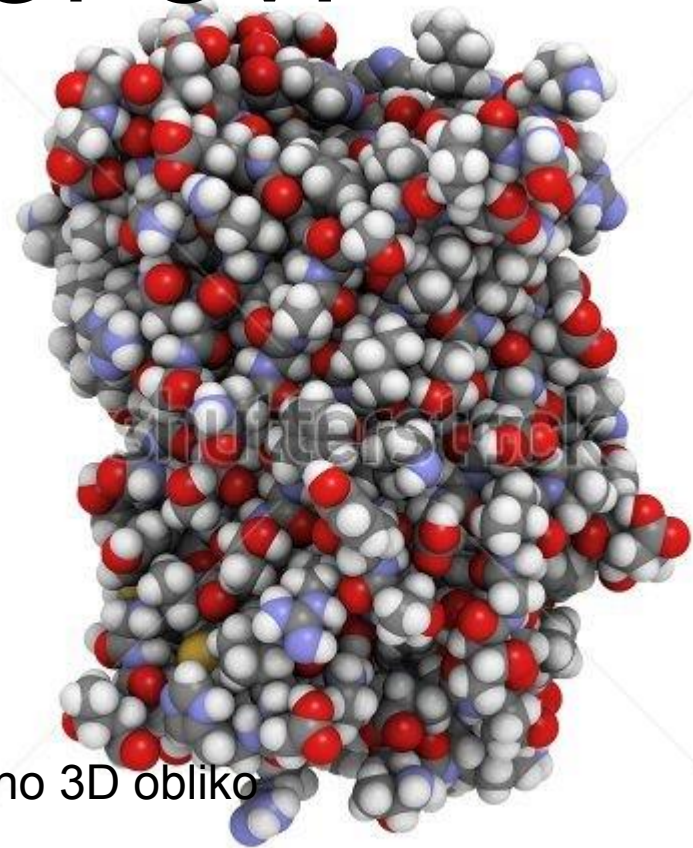
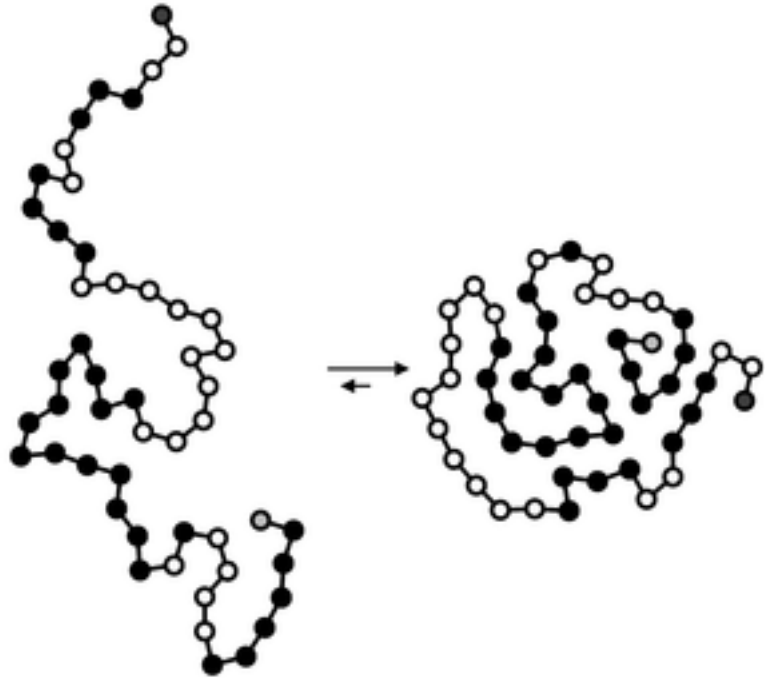


Gibljev v 2D
Gibljev v 3D

Obstaja algoritem, ki v 2D pove ali je spoj gibljiv ali ne.

ODPRTO VPRAŠANJE: Konstruiraj algoritem, ki v 3D pove, ali je spoj gibljiv ali ne.

UPORABA SKLOPOV:

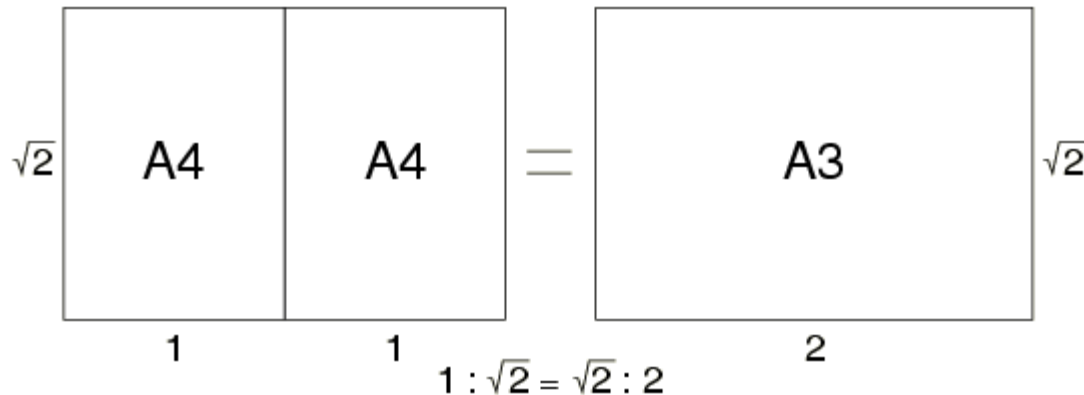


Zvijanje proteinov iz sinteze DNA v končno 3D obliko

ORIGAMI

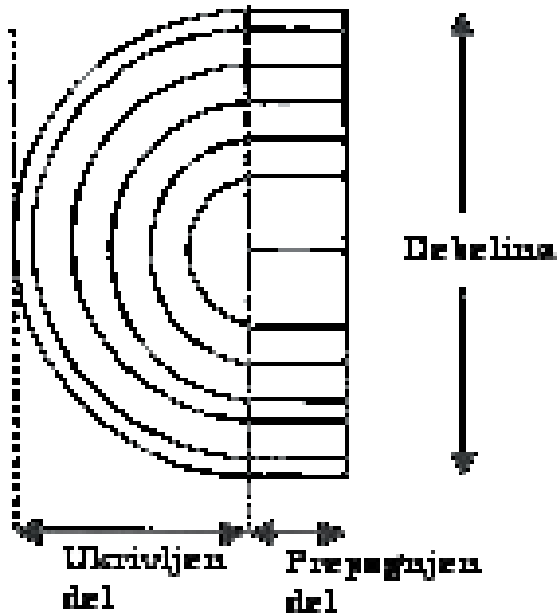
Kolikokrat lahko papir debeline t prepognemo?

- ❖ Vsakič se debelina papirja podvoji. Po N prepogibih dobimo debelino $2^N t$.
- ❖ Za standardni A4 papir dimenzij (v mm) $210 \times 297 \times 0.05$:
 - ✓ Prvi prepogib ga zmanjša na cca 150 mm in zdebeli na 0.1 mm
 - ✓ Drugi prepogib: 75 mm širine in 0.2mm debeline
 - ✓ V 7 prepogibu bi bil cca $300 / 2^7 = 2.34$ mm širok toda $0.05 * 2^7 = \mathbf{6.4 \text{ mm debel}}$



ORIGAMI

Kolikokrat lahko papir debeline t prepognemo?

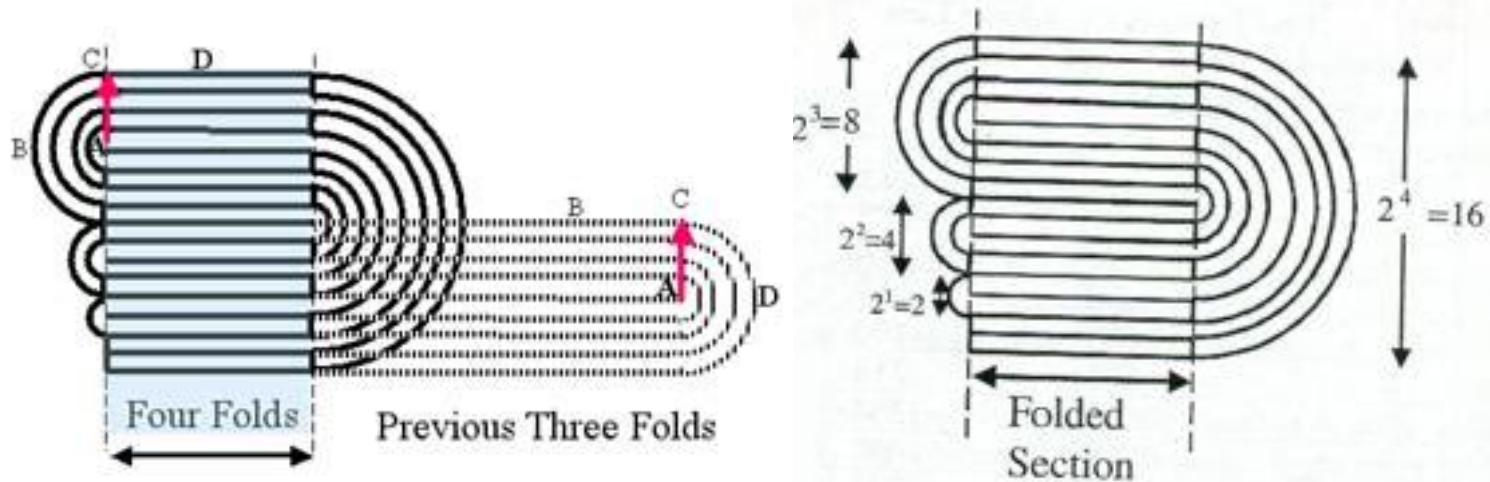


ORIGAMI

Kolikokrat lahko papir debeline t prepognemo?

Izrek (Britney Gallivan 2001). Za N prepogibov (v isti smeri) papirja debeline t rabimo dolžino vsaj $L = \frac{\pi t * (2^n + 4)(2^n - 1)}{6}$

DOKAZ:



$$L = \pi t * \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{2^{i-1}} [2^{i-1} - (k - 1)]$$

V notranji vsoti je radij od zunanjega prepogn. dela

ORIGAMI

Britney Gallivan



ORIGAMI

Nadaljevanje sledi.....