Ali sme imeti na maturi polinom kompleksno ničlo?

Ddr. Janez Žerovnik, UL FS in IMFM

Radi se pohvalimo s tem, da je matematika zelo natančna in na logično korektnih dokazih osnovana znanost. Ob tem pa pogosto spregledamo (milo rečeno) nenatančnosti pri najbolj osnovnih konceptih. Zaradi pogoste uporabe smo se marsičesa navadili, zato se pri razmisleku, ali je neka naloga primerna, torej dovolj jasna in nedvoumna, za maturitetni izpit, presenetljivo pogosto pojavijo vprašanja, kot je tisto v naslovu. Na nekaj primerih iz srednješolske matematike bomo razmislili, kaj pravzaprav mislimo, ko zapišemo, da je »funkcija v točki naraščajoča«, da ima polinom kompleksne ničle in podobno.

- Uvod
- Ničle polinomov
- Vektorji
- Definicija funkcije in lastnosti funkcij
- Nedoločeni integral
- Zaključek

UVOD

- **maturitetni izpit** : pregled in povzetek srednješolske matematike in **priprava na študij**

- Osnovni pojmi – ali je tu res vse jasno !?
- Učni načrt -> učbeniki -> praksa -> matura
- Nekaj primerov za razmislek...

Uvod - Nekaj kazalcev

Ali je pokončna piramida res pokončna?
Dijaška raziskovalna naloga (Avtorja: Maja Križnič, Lenart Žežlina, mentor: Alojz Grahor)
https://www.sgv.si/raziskovalne-naloge/

KUPM 2014
https://www.zrss.si/pdf/zbornik-prispevkov-kupm2014.pdf (str. 165)

Obzornik za matematiko in fiziko

Matematika v šoli

167. ŽEROVNIK, Janez. Računanje kvartilov v elementarni statistiki. *Obzornik za matematiko in fiziko*, ISSN 0473-7466, 2017, letn. 64, št. 1, str. 20-31

169. ŽEROVNIK, Janez. Odvod funkcije brez uporabe limit = The derivative of a function without the usage of limits. *Matematika v šoli*, ISSN 1318-010X, 2015, letn. 21, št. 1/2, str. 56-62

173. LEŠNIK ŠTEFOTIČ, Vesna, ŽEROVNIK, Janez. Kombinatorična teorija determinant. *Matematika v šoli*, ISSN 1318-010X, 2008, letn. 14, št. 3-4, str. 244-252

176. ŽEROVNIK, Janez. O definiciji odvedljivosti. *Matematika v šoli*, ISSN 1318-010X, 2002/03, letn. 10, št. 1-2, str. 85-88.

Ničle polinomov

- definicija ničle funkcije :
- definicija polinoma :
- Običajna naloga : poišči VSE ničle polinoma (tudi kompleksne ... !?)

<u>Nesmiselno, saj realna funkcija seveda ne more imeti kompleksnih ničel !</u>

Kaj narediti na maturi .. ?

Ničle polinomov

To je lep primer, ko bi bilo zanimivo pogledati v zgodovino, tu mislim na številne učbenike, ki so si sledili v zadnjih desetletjih....

Predlog „rešitve“:

Ker v učnem načrtu ni kompleksnih funkcij, lahko nejasnost odpravimo na primer takole: **polinomi so realne funkcije realne spremenljivke, pri obravnavi enačbe $p(x) = 0$ pa povemo, da se da izraz na levi strani razcepiti na linearne in nerazcepne kvadratne faktorje**, ki imajo konjugirano kompleksne korene (rešitve), kar je znano že od prej, iz obravnave kvadratne enačbe.

Vektorji

- Definicija vektorja:

Usmerjene daljice ?... Ekvivalenčni razred !!!

- Komponente in/ali koordinate vektorja;

povezava s fiziko

Vektorji - definicija

<u>Definicija vektorja, ki pravi: vektor je usmerjena daljica med točkama A in B</u> **je napačna**.

To se pokaže takoj ko povemo, kdaj sta vektorja enaka. Nerodna je seveda potem tudi definicija nasprotnega vektorja, itd. Vektorji so seveda ekvivalenčni razredi usmerjenih daljic, za relacijo enakost vektorjev. Če to lahko naredimo za racionalna števila, ni razloga, da ne bi korektno definirali tudi pojma vektorja.

Vektorji – koordinate/komponente

Druga nedoslednost je uporaba pojmov <u>koordinate in komponente vektorja.</u>

Npr. v enem od učbenikov »**Komponente** krajevnega vektorja točke A **so kar koordinate** točke A«

Ampak v fiziki (pogosto celo v zgledu v istem učbeniku) pa silo razstavimo na recimo dve komponenti, ki sta tudi sili! *Precej nerazumljivo ...*

Vektorji– koordinate/komponente

Sprejemljivo bi bilo v matematiki govoriti o **koordinatah ali komponentah** vektorja, in poudariti, da tu vedno govorimo o komponentah glede na ortonormirano bazo, zato zapis

$$\vec{v} = v_{\boldsymbol{x}}\,\vec{\imath} + v_{\boldsymbol{y}}\,\vec{\jmath} + v_{\boldsymbol{z}}\vec{k} = (v_{\boldsymbol{x}}, v_{\boldsymbol{y}}, v_{\boldsymbol{z}}).$$

S tem smo se izognili težavi, ki nastopi, ko hočemo uporabiti vektorski račun v fiziki. Tam seveda je komponenta sile sila, torej komponente vektorja so vektorji in ne neki koeficienti (torej skalarji)! Za povrh so seveda komponente v fiziki pogosto definirane naravno glede na obravnavani primer, in dobljena baza pogosto ni ortonormirana baza. Standarden primer je klada na klancu.

Definicija funkcije

- Teorija množic
- Analiza - realne funkcije
- Domena in kodomena ←→ (naravno) definicijsko območje in zaloga vrednosti

- Pogosta napaka maturantov – ne ločijo med funkcijo in grafom!

Definicija funkcije

- Teorija množic :

»Funkcija iz množice A v množico B je predpis, ki vsakemu x iz množice A priredi natanko določen y iz množice B.«

- Analiza - realne funkcije :

»Funkcijo, ki preslika realna števila v realna, imenujemo realna funkcija realne spremenljivke.« in potem kasneje

»Ali je predpis, ki vsakemu realnemu številu priredi njegovo obratno vrednost, funkcija?«

pa seveda standardno govorimo o »funkciji sinus«, »funkciji x^2«, »funkciji $1/x$« in o »funkciji $\frac{p(x)}{q(x)}$ «.

Definicija funkcije

Na kratko opišimo možno rešitev, ki še najmanj posega v običajne pristope poučevanja:

Preslikava ali funkcija (v teoriji množic, torej nasploh v matematiki) je določena s trojico $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{f})$, kjer sta $\boldsymbol{A}$ in $\boldsymbol{B}$ množici, $\boldsymbol{f}$ (ali $\boldsymbol{f}(.)$) pa je predpis ki vsakemu elementu iz množice $\boldsymbol{A}$ priredi natanko en element iz množice $\boldsymbol{B}$. Pogosto uporabimo okrajšavo $f = (A, B, f)$. Množici A in B imenujemo domena in kodomena. **Pri obravnavi realnih funkcij realne spremenljivke se dogovorimo, da lahko funkcijo definiramo s predpisom.** Tihi dogovor, ki je kot kaže pogosto »pretih«, pa je naslednji: **kodomena je v takem primeru množica realnih števil, domena pa je (naravno) definicijsko območje predpisa $\boldsymbol{D_f}$.** To je največja podmnožica $\mathbb{R}$, na kateri je predpis dobro definiran, torej predpis nam za te argumente da realno število. Če ne povemo nič o domeni, nam **predpis $\boldsymbol{f}$ da funkcijo $\boldsymbol{f} = (\boldsymbol{D_f}, \mathbb{R}, \boldsymbol{f})$.**

Še nekaj o lastnostih funkcij..

- **Funkcija je naraščajoča** na intervalu.. (narašča v točki.. Kaj to pomeni?)

- Napaka, če naredimo unijo intervalov naraščanja !

(če f narašča na intervalu I in narašča na intervalu J, potem ni nujno, da narašča na uniji !!)

- Zveznost

- Odvedljivost

- **Asimptote.**

Asimptota je premica. Torej funkcija s predpisom f(x)=x/(x-1) ima navpično asimptoto z enačbo x=1.

(Pol pa je točka domene (definicijskega območja), spet zapišemo x=1.)

Na maturi pri kandidatih tega ne sankcioniramo strogo, podobno je z ekstremi funkcij, $M = \max f(x) = f(x_0)$ ali $T(x_0,M)$.

Nedoločeni integral

Ker želimo poudariti, da je v tipičnem primeru primitivnih funkcij dane funkcije veliko in da tvorijo družino funkcij, ki se razlikujejo za aditivno konstanto, zapišemo, npr.

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \; x^{n+1} \; + C \,,$$

kjer je C poljubno realno število, in seveda $n \neq -1$.

Dijaka, ki pozabi na »+C« pogosto kaznujemo s kako nedodeljeno točko. <u>Ampak te naše formule so **napačne**, vsaj nekatere od njih !</u>

Nedoločeni integral – primer:

$$\int x^{-3}\,dx = \frac{1}{-2}\ x^{-2}\ + C$$

pove, da je ima katerakoli primitivna funkcija funkcije $f(x) = x^{-3}$ za neki $C \in \mathbb{R}$ predpis oblike $F(x) = -\frac{1}{2}\ x^{-2}\ + C$. Kaj pa funkcija s prepisom

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^{-2} + 1, & x > 0, \\ -\frac{1}{2}x^{-2} + 2, & x < 0 \end{cases} \quad ?$$

<u>Odvod funkcije h na vsakem od intervalov je enak x^{-3}, našli smo primitivno funkcijo funkcije f, ki ni zgoraj predvidene oblike !</u>

Nedoločeni integral – primer:

Težava je v tem, da se poljubni dve primitivni funkciji razlikujeta za konstanto na vsakem povezanem območju.

Problematični » $+C$« torej lahko pogojno ostane, le zavedati se je treba, da to ni konstanta $C \in \mathbb{R}$, pač pa **odsekoma konstantna funkcija**.

Kaj sploh razumemo pod pojmom nedoločeni integral ???

ZAKLJUČEK

- na izbrane primere sem naletel bolj ali manj po naključju, in preveril samo nekatere učbenike in druge vire.

- Zato nikakor ne trdim, da je to seznam najpomembnejših ali najresnejših težav.

- Je pa **motivacija**, da se ob osvežitvi programa ali pisanju novega učbenika **vedno znova vprašamo**, ali je mogoče še kaj narediti boljše.

VPRAŠANJA, KOMENTARJI ... ?