# OD KAČ IN LESTEV DO CENE DELNIC

## Famnitovi izleti v matematično vesolje

Ana Zalokar

Univerza na Primorskem, Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije

16. februar 2022

# Pregled

1 Uvod
- Napoved vremena

2 Andrej Markov

3 Markovske verige
- Preštevanje
- Namizna igra Kače in lestve
- Cena delnic

# Napoved vremena

S pomočjo zbranih podatkov in računalniške simulacije bi radi napovedali vreme.

Vreme opazujemo 20 dni in dobimo naslednje podatke:

S S S S D D S S D D D D D S S S D S D D

# Napoved vremena

S pomočjo zbranih podatkov in računalniške simulacije bi radi napovedali vreme.

Vreme opazujemo 20 dni in dobimo naslednje podatke:

S S S S D D S S D D D D D S S S D S D D

- **1. pristop:** Polovica dni je deževnih, torej P(D)=0,5 in P(S)=0,5.

# Napoved vremena

S pomočjo zbranih podatkov in računalniške simulacije bi radi napovedali vreme.

Vreme opazujemo 20 dni in dobimo naslednje podatke:

S S S S D D S S D D D D D S S S D S D D

- **1. pristop:** Polovica dni je deževnih, torej P(D)=0,5 in P(S)=0,5. Naredimo simulacijo in dobimo:
  S S D D D S D S D S D S S D S D D S D S.

# Napoved vremena

S pomočjo zbranih podatkov in računalniške simulacije bi radi napovedali vreme.

Vreme opazujemo 20 dni in dobimo naslednje podatke:

S S S S D D S S D D D D D S S S D S D D

- **1. pristop:** Polovica dni je deževnih, torej P(D)=0,5 in P(S)=0,5. Naredimo simulacijo in dobimo:
  S S D D D S D S D S D S S D S D D S D S.
- **2. pristop:** Če je danes deževen dan, bo z večjo verjetnostjo jutri deževen kot sončen. P(D|S S S S D D S S D)=P(D|D) - markovska lastnost

# Napoved vremena



S pomočjo zbranih podatkov in računalniške simulacije bi radi napovedali vreme.

Vreme opazujemo 20 dni in dobimo naslednje podatke:

S S S S D D S S D D D D D S S S D S D D

- **1. pristop:** Polovica dni je deževnih, torej P(D)=0,5 in P(S)=0,5. Naredimo simulacijo in dobimo:
  S S D D D S D S D S D S S D S D D S D S.
- **2. pristop:** Če je danes deževen dan, bo z večjo verjetnostjo jutri deževen kot sončen. P(D|S S S S D D S S D)=P(D|D) - markovska lastnost

  P(D|D)=0,9 in P(S|D)=0,1 in podobno P(S|S)=0,9 in P(D|S)=0,1.

# Napoved vremena



S pomočjo zbranih podatkov in računalniške simulacije bi radi napovedali vreme.

Vreme opazujemo 20 dni in dobimo naslednje podatke:

S S S S D D S S D D D D D S S S D S D D

- **1. pristop:** Polovica dni je deževnih, torej P(D)=0,5 in P(S)=0,5.
  Naredimo simulacijo in dobimo:
  S S D D D S D S D S D S S D S D D S D S.
- **2. pristop:** Če je danes deževen dan, bo z večjo verjetnostjo jutri deževen kot sončen. $P(D|S\ S\ S\ S\ D\ D\ S\ S\ D) = P(D|D)$ - markovska lastnost

  $P(D|D)=0{,}9$ in $P(S|D)=0{,}1$ in podobno $P(S|S)=0{,}9$ in $P(D|S)=0{,}1$.
  Naredimo simulacijo in dobimo:
  S S S S S S D D D D D D S S D D D D D D.

# Napoved vremena

S pomočjo zbranih podatkov in računalniške simulacije bi radi napovedali vreme.

Vreme opazujemo 20 dni in dobimo naslednje podatke:

S S S S D D S S D D D D D S S S D S D D

- **1. pristop:** Polovica dni je deževnih, torej P(D)=0,5 in P(S)=0,5.
  Naredimo simulacijo in dobimo:
  S S D D D S D S D S D S S D S D D S D S.
- **2. pristop:** Če je danes deževen dan, bo z večjo verjetnostjo jutri deževen kot sončen. P(D|S S S S D D S S D)=P(D|D) - markovska lastnost

  P(D|D)=0,9 in P(S|D)=0,1 in podobno P(S|S)=0,9 in P(D|S)=0,1.
  Naredimo simulacijo in dobimo:
  S S S S S S D D D D D D S S D D D D D D.

Poglejmo si grafični prikaz markovske verige `https://setosa.io/markov`.

# Uporaba



Markovske verige imajo zelo široko uporabo:

- Ekonomija (npr. borzni trgi)
- Biologija (npr. dinamika populacije določene živalske vrste)
- Genetika (npr. mutacije virusa)
- Informatika (npr. PageRank)
- Fizika (npr. kolektivno gibanje velike količine delcev)
- Kemija (npr. mreža kemijskih reakcij)
- ...

# Andrej Andrejevič Markov (1856-1922)

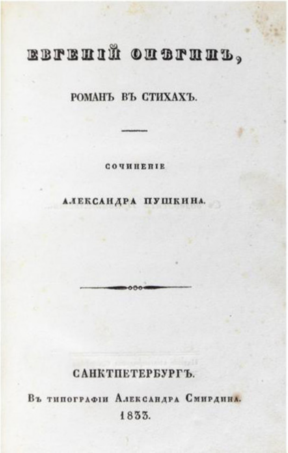


Andrej Andrejevič Markov (1856-1922) [1]

Ruski matematik, ki je pustil velik pečat na področju slučajnih procesov.

[1] Slikovni vir: https://en.wikipedia.org/wiki/Markov chain

# Ideja


ЕВГЕНІЙ ОНѢГИНЪ,

РОМАНЪ ВЪ СТИХАХЪ.

СОЧИНЕНІЕ

АЛЕКСАНДРА ПУШКИНА.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.

Въ типографіи Александра Смирдина.

1833.


[2]

[2] Slikovni vir: https://en.wikipedia.org/wiki/Eugene Onegin

# Preštevanje poti

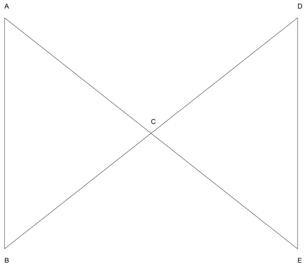


Kaj lahko z markovskimi verigami počnemo?

# Preštevanje poti

Kaj lahko z markovskimi verigami počnemo?

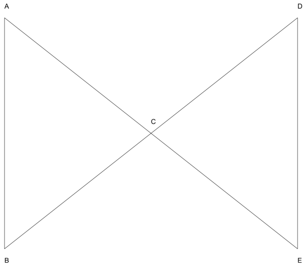
**Primer:** Slučajni sprehod po metuljčku



# Preštevanje poti

Kaj lahko z markovskimi verigami počnemo?

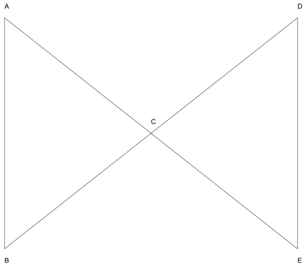
**Primer:** Slučajni sprehod po metuljčku




- Kolikšna je verjetnost, da potujemo ACDC?

# Preštevanje poti

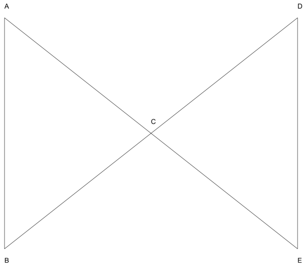
Kaj lahko z markovskimi verigami počnemo?
**Primer:** Slučajni sprehod po metuljčku




- Kolikšna je verjetnost, da potujemo ACDC? $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$.

# Preštevanje poti

Kaj lahko z markovskimi verigami počnemo?
**Primer:** Slučajni sprehod po metuljčku

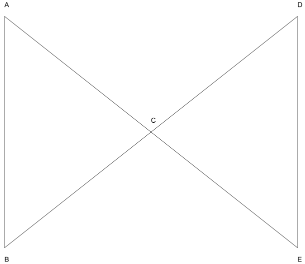



- Kolikšna je verjetnost, da potujemo ACDC? $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$.
- Kolikšna je verjetnost, da pridemo v dveh korakih iz A nazaj v A?

# Preštevanje poti



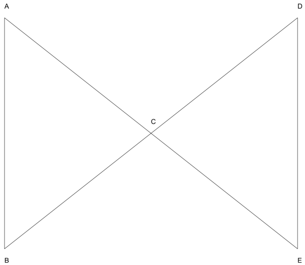
Kaj lahko z markovskimi verigami počnemo?
**Primer:** Slučajni sprehod po metuljčku




- Kolikšna je verjetnost, da potujemo ACDC? $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$.
- Kolikšna je verjetnost, da pridemo v dveh korakih iz A nazaj v A? $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$.

OD KAČ IN LESTEV DO CENE DELNIC
Ana Zalokar
Uvod
Napoved vremena
Andrej Markov
Markovske verige
Preštevanje
Namizna igra Kače in lestve
Cena delnic

Kaj lahko z markovskimi verigami počnemo?
**Primer:** Slučajni sprehod po metuljčku

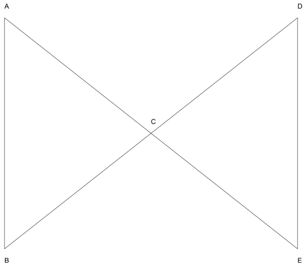



- Kolikšna je verjetnost, da potujemo ACDC? $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$.
- Kolikšna je verjetnost, da pridemo v dveh korakih iz A nazaj v A? $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.
- Kolikšna je verjetnost, da se veriga po $n$ korakih prvič vrne nazaj v C?

# Preštevanje poti

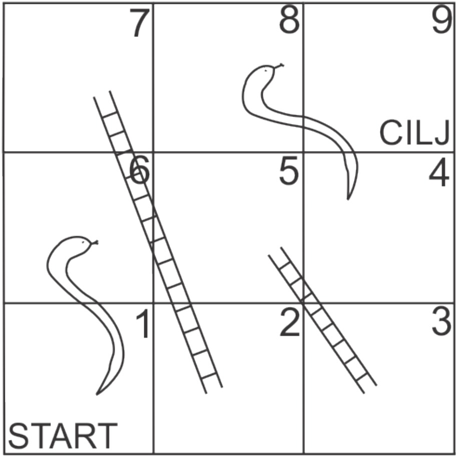
Kaj lahko z markovskimi verigami počnemo?

**Primer:** Slučajni sprehod po metuljčku

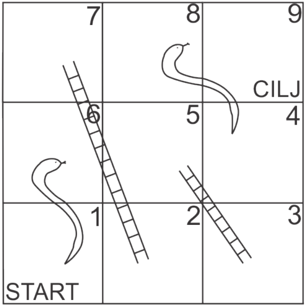



- Kolikšna je verjetnost, da potujemo ACDC? $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$.
- Kolikšna je verjetnost, da pridemo v dveh korakih iz A nazaj v A? $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.
- Kolikšna je verjetnost, da se veriga po $n$ korakih prvič vrne nazaj v C? $4 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

# Kače in lestve




Grb - eno polje naprej, Cifra - dve polji naprej



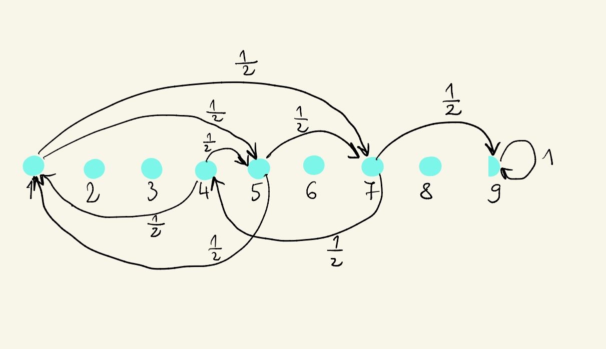

Grb - eno polje naprej, Cifra - dve polji naprej

Zanimata nas dve stvari:

- Kolikšna je verjetnost, da igralec, ki je dosegel srednji kvadrat, dokonča igro brez da bi zdrsnil nazaj na prvi kvadrat?
- Koliko korakov v povprečju potrebuje igralec, da pride na cilj?

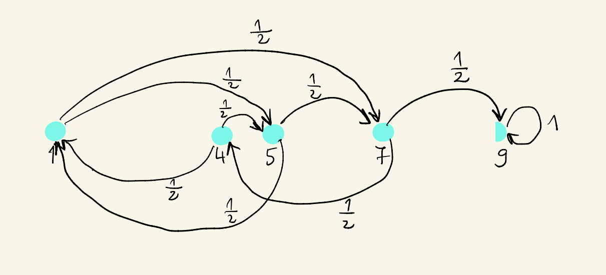
# Kače in lestve

Namizno igro lahko predstavimo kot markovsko verigo



OD KAČ IN LESTEV DO CENE DELNIC
Ana Zalokar
Uvod
Napoved vremena
Andrej Markov
Markovske verige
Preštevanje
Namizna igra Kače in lestve
Cena delnic

ali brez odvečnih stanj



OD KAČ IN LESTEV DO CENE DELNIC
Ana Zalokar
Uvod
Napoved vremena
Andrej Markov
Markovske verige
Preštevanje
Namizna igra Kače in lestve
Cena delnic

Verjetnost bomo računali s pomočjo *nasprotnega dogodka:*

$$P(\textit{igralec ne pade v 1, če začne v 5}) = 1 - P(\textit{igralec pade v 1, če začne v 5})$$

# Kače in lestve

Verjetnost bomo računali s pomočjo *nasprotnega dogodka:*

$$P(\textit{igralec ne pade v 1, če začne v 5}) = 1 - P(\textit{igralec pade v 1, če začne v 5})$$

*Verjetnost, da igralec pade v 1, če začne v 5, bomo označili s* $h_5^1$.

# Kače in lestve

Verjetnost bomo računali s pomočjo *nasprotnega dogodka:*

$$P(\textit{igralec ne pade v 1, če začne v 5}) = 1 - P(\textit{igralec pade v 1, če začne v 5})$$

*Verjetnost, da igralec pade v 1, če začne v 5, bomo označili s $h_5^1$.*

## Izrek

*Rešitev $h_i^A$ dobimo kot minimalno (nenegativno) rešitev sistema:*

$$h_i^A = 1 \quad \forall i \in A$$
$$h_i^A = \sum_{j \notin A} p_{ij} h_j^A \quad \forall i \notin A$$

# Izračun verjetnosti

Zapišemo sistem in iščemo minimalno nenegativno rešitev:

$$
\begin{aligned}
h_1 &= 1 \\
h_4 &= \tfrac{1}{2} h_1 + \tfrac{1}{2} h_5 \\
h_5 &= \tfrac{1}{2} h_1 + \tfrac{1}{2} h_7 \\
h_7 &= \tfrac{1}{2} h_4 + \tfrac{1}{2} h_9 \\
h_9 &= 0
\end{aligned}
$$

## Izračun verjetnosti



Zapišemo sistem in iščemo minimalno nenegativno rešitev:

$$\begin{aligned} h_1 &= 1 \\ h_4 &= \tfrac{1}{2}h_1 + \tfrac{1}{2}h_5 \\ h_5 &= \tfrac{1}{2}h_1 + \tfrac{1}{2}h_7 \\ h_7 &= \tfrac{1}{2}h_4 + \tfrac{1}{2}h_9 \\ h_9 &= 0 \end{aligned}$$

Dobimo $h_5 = \frac{5}{7}$

## Izračun verjetnosti



Zapišemo sistem in iščemo minimalno nenegativno rešitev:

$$\begin{aligned} h_1 &= 1 \\ h_4 &= \tfrac{1}{2} h_1 + \tfrac{1}{2} h_5 \\ h_5 &= \tfrac{1}{2} h_1 + \tfrac{1}{2} h_7 \\ h_7 &= \tfrac{1}{2} h_4 + \tfrac{1}{2} h_9 \\ h_9 &= 0 \end{aligned}$$

Dobimo $h_5 = \frac{5}{7}$, torej je iskana rešitev $1 - h_5 = \frac{2}{7}$.

# Število korakov

Koliko korakov v povprečju potrebuje igralec, da pride na cilj?

# Število korakov

Koliko korakov v povprečju potrebuje igralec, da pride na cilj?

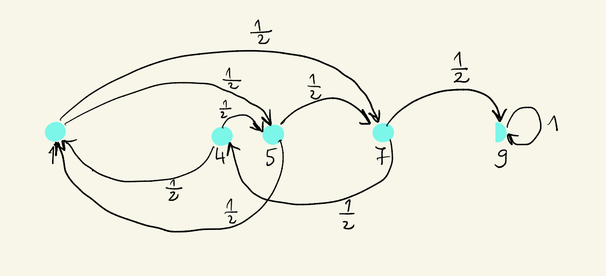
## Izrek

Rešitev $k_i^A$ dobimo kot minimalno (nenegativno) rešitev sistema:

$$\begin{aligned} k_i^A &= 0 \quad \forall i \in A \\ k_i^A &= 1 + \sum_{j \notin A} p_{ij} k_j^A \quad \forall i \notin A \end{aligned}$$

Iščemo $k_1^9$.

# Kače in lestve



# Število korakov



Koliko korakov v povprečju potrebuje igralec, da pride na cilj?

$$\begin{aligned} k_9 &= 0 \\ k_1 &= 1 + \tfrac{1}{2}k_5 + \tfrac{1}{2}k_7 \\ k_4 &= 1 + \tfrac{1}{2}k_1 + \tfrac{1}{2}k_5 \\ k_5 &= 1 + \tfrac{1}{2}k_1 + \tfrac{1}{2}k_7 \\ k_7 &= 1 + \tfrac{1}{2}k_4 + \tfrac{1}{2}k_9 \end{aligned}$$

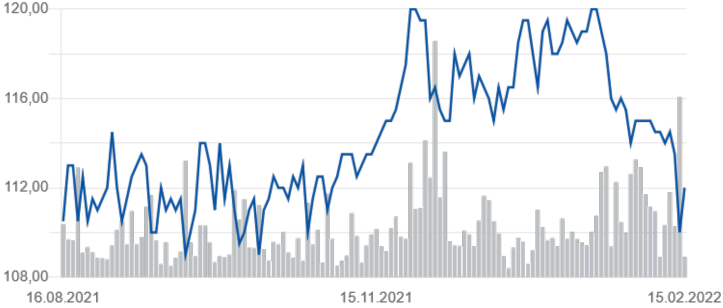
# Število korakov

Koliko korakov v povprečju potrebuje igralec, da pride na cilj?

$$
\begin{aligned}
k_9 &= 0 \\
k_1 &= 1 + \tfrac{1}{2}k_5 + \tfrac{1}{2}k_7 \\
k_4 &= 1 + \tfrac{1}{2}k_1 + \tfrac{1}{2}k_5 \\
k_5 &= 1 + \tfrac{1}{2}k_1 + \tfrac{1}{2}k_7 \\
k_7 &= 1 + \tfrac{1}{2}k_4 + \tfrac{1}{2}k_9
\end{aligned}
$$

Rešimo sistem in dobimo $k_1^9 = 7$.

# Cena delnic

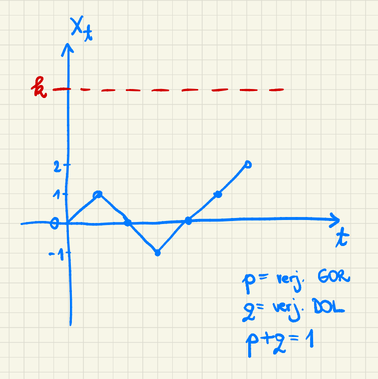



Gibanje cene delnice Krke (KRKG) v zadnje pol leta.[3]

[3] Slikovni vir: https://ljse.si/

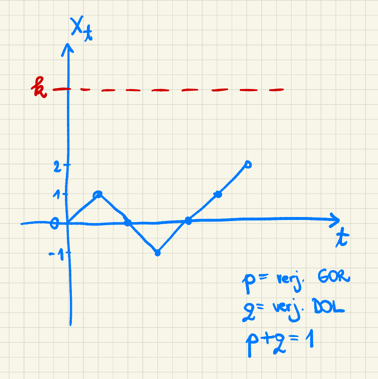
# Primer

Gibanje cene delnic poenostavimo v obliko slučajnega sprehoda na $\mathbb{Z}$.



# Primer

Gibanje cene delnic poenostavimo v obliko slučajnega sprehoda na $\mathbb{Z}$.




- Kakšna je verjetnost, da nekoč pridemo do $k > 0$, če začnemo v 0?

# Slučajni sprehod



Zanima nas verjetnost, da nekoč dosežemo $k$ (če začnemo v 0) - označimo s $P_k$.

# Slučajni sprehod

Zanima nas verjetnost, da nekoč dosežemo $k$ (če začnemo v 0) - označimo s $P_k$.Lažje bo najprej poiskati verjetnost, da nekoč dosežemo 1 in uporabiti

$$P_k = (P_1)^k.$$

# Slučajni sprehod



Zanima nas verjetnost, da nekoč dosežemo $k$ (če začnemo v 0) - označimo s $P_k$.Lažje bo najprej poiskati verjetnost, da nekoč dosežemo 1 in uporabiti

$$P_k = (P_1)^k.$$

Sedaj računamo

$$P_1 = p \cdot 1 + q \cdot P_2,$$

# Slučajni sprehod

Zanima nas verjetnost, da nekoč dosežemo $k$ (če začnemo v 0) - označimo s $P_k$.Lažje bo najprej poiskati verjetnost, da nekoč dosežemo 1 in uporabiti

$$P_k = (P_1)^k.$$

Sedaj računamo

$$P_1 = p \cdot 1 + q \cdot P_2,$$

kar lahko zapišemo kot

$$P_1 = p \cdot 1 + q \cdot P_1^2.$$

# Slučajni sprehod



Zanima nas verjetnost, da nekoč dosežemo $k$ (če začnemo v 0) - označimo s $P_k$.Lažje bo najprej poiskati verjetnost, da nekoč dosežemo 1 in uporabiti

$$P_k = (P_1)^k.$$

Sedaj računamo

$$P_1 = p \cdot 1 + q \cdot P_2,$$

kar lahko zapišemo kot

$$P_1 = p \cdot 1 + q \cdot P_1^2.$$

Dobimo kvadratno enačbo

$$qP_1^2 - P_1 + p = 0,$$

ki jo rešimo po znani formuli

$$P_1 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4pq}}{2q}.$$

# Slučajni sprehod



Uporabimo trik

$$1 = p + q$$
$$1 = (p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$$
$$1 - 4pq = (p-q)^2$$

# Slučajni sprehod

Uporabimo trik

$$1 = p + q$$
$$1 = (p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$$
$$1 - 4pq = (p-q)^2$$

kar lahko vstavimo v rešitev enačbe. Končno dobimo

$$P_1 = \frac{1 \pm (p-q)}{2q}.$$

# Slučajni sprehod

Uporabimo trik

$$1 = p + q$$
$$1 = (p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$$
$$1 - 4pq = (p-q)^2$$

kar lahko vstavimo v rešitev enačbe. Končno dobimo

$$P_1 = \frac{1 \pm (p-q)}{2q}.$$

Pogledamo za vsak predznak posebej

- $+$ : $P_1 = \frac{p}{q}$. Sledi $P_k = \left(\frac{p}{q}\right)^k$ za $p < q$.

# Slučajni sprehod

Uporabimo trik

$$1 = p + q$$
$$1 = (p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$$
$$1 - 4pq = (p-q)^2$$

kar lahko vstavimo v rešitev enačbe. Končno dobimo

$$P_1 = \frac{1 \pm (p-q)}{2q}.$$

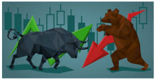
Pogledamo za vsak predznak posebej

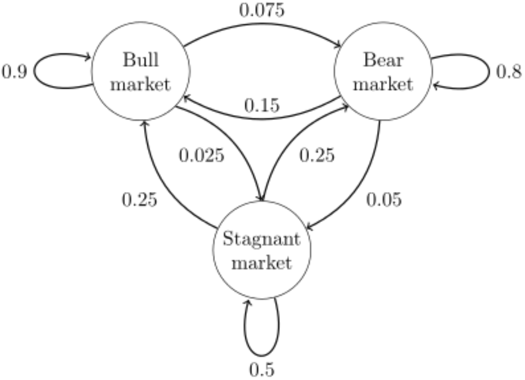
- $+$ : $P_1 = \frac{p}{q}$. Sledi $P_k = \left(\frac{p}{q}\right)^k$ za $p < q$.
- - : $P_1 = 1$. Sledi $P_k = 1$ za $p \geq q$.

OD KAČ IN LESTEV DO CENE DELNIC
Ana Zalokar
Uvod
Napoved vremena
Andrej Markov
Markovske verige
Preštevanje
Namizna igra Kače in lestve
Cena delnic

# Stanje trga

Tudi stanje borznega trga se lahko predstavi z markovsko verigo.






4

[4] Slikovni vir: Wikipedia

# Literatura




- Norris, J. R.: Markov chains, Cambridge University Press, 1997.
- Grimmet, G., Welsh, D.: Probability, Oxford University Press, 2014.

Hvala za vašo pozornost.