



Jasna Prezelj
UP FAMNIT in UL FMF

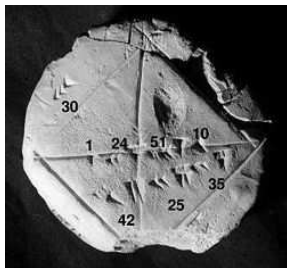
Popotovanje od korena do fraktala

Koreni

Babilonska metoda za računanje korenov: tablica YBC (Yale Babylonian Collection) 7289 (1800 do 1600 pr.n.š.) Zapis je v šestdesetiškem sistemu:

$$1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 \doteq 1.414212963,$$

$$\sqrt{2} \doteq 1.414213562.$$



Kotne funkcije

Jamšid Al Kaši (1380 - 1429) je računal sinus 1 stopinje. Za rezultat je dobil

0.017452406437283517.

Današnji računalniki nam dajo rezultat

0.017452406437283513.

Babilonska metoda

Koren števila a je rešitev enačbe $x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)$. Grafično to pomeni presek grafov funkcij $y = x$ in $f(x) = (x + a/x)/2$. Za $a = 3$ dobimo naslednjo sliko:

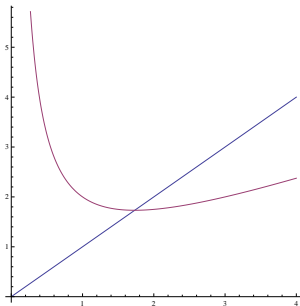


Figure: Presečišče grafov

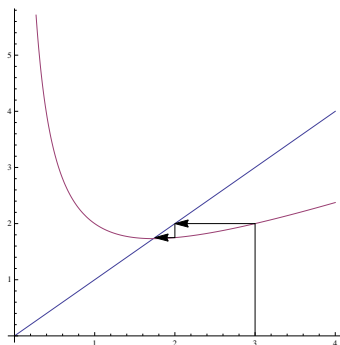


Figure: Iskanje preseka z iteracijo

Splošna formula

Splošna iteracijska formula za izračun \sqrt{a} , $a > 0$ po Babilonski metodi je

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right).$$

Navadna iteracija

Babilonska metoda je poseben primer navadne iteracije. S predpisom $x \mapsto f(x)$ je dana funkcija f . Radi bi ugotovili, ali za dan začetni približek x_0 zaporedje iteratov

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots$$

kam konvergira. Oglejmo si nekaj preprostih primerov.

- $f(x) = x/2$: Dobimo zaporedje $x_n = x_0/2^n$ in to gre k 0.
- $f(x) = 3x$: Dobimo zaporedje $x_n = x_0 3^n$ in to gre čez vse meje za $x_0 \neq 0$.
- $f(x) = x$: Dobimo zaporedje $x_n = x_0$ za vsak začetni približek x_0 .
- $f(x) = x(1 - x)$ (logistična enačba): rezultat je odvisen od začetnega približka.

Newtonova ali tangentna metoda

Ničle funkcije $y = x^2 + ax + b$ poiščemo s pomočjo iteracijske funkcije

$$f(x) = x - \frac{x^2 + ax + b}{2x + a}.$$

Babilonska metoda za $\sqrt{3}$ je poseben primer Newtonove za $a = 0$ in $b = -3$. Oglejmo si metodo na primeru $y = x^2 - x - 2$.

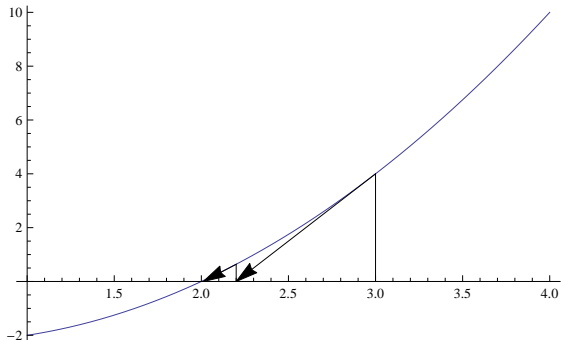


Figure: Newtonova metoda

Newtonova metoda za splošno (enkrat zvezno odvedljivo) funkcijo f je dana s predpisom

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

z začetnim približkom x_0 . Dodatno moramo predpostaviti, da je $f'(x_n) \neq 0, n \in \mathbb{N}_0$.

Sinus 1 stopinje

$$\sin 72^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \text{ in } \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4},$$

$$\sin 15^\circ = \sin(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{4},$$

$$\begin{aligned} \sin 12^\circ &= \sin(72^\circ - 60^\circ) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ &= \frac{1}{8} \left(\sqrt{3} - \sqrt{15} + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \right) \text{ in podobno} \end{aligned}$$

Sinus 3

$$\sin 3^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{9 - \sqrt{5} - \sqrt{6(5 + \sqrt{5})}}{2 \left(4 + \sqrt{7 + \sqrt{5} + \sqrt{6(5 + \sqrt{5})}} \right)}}$$

To je približno

0.052335956242943765....

Sinus 1

Naj bo $a = \sin 3^\circ$ in $x = \sin 1^\circ$. Po adicijskih izrekih dobimo zvezo

$$4x^3 - 3x + a = 0.$$

Jamšid Al Kaši je enačbo prepisal v obliko

$$x = \frac{a + 4x^3}{3}$$

in za izračun uporabil navadno iteracijo

$$x_{n+1} = \frac{a + 4x_n^3}{3}, \quad x_0 = a/3.$$

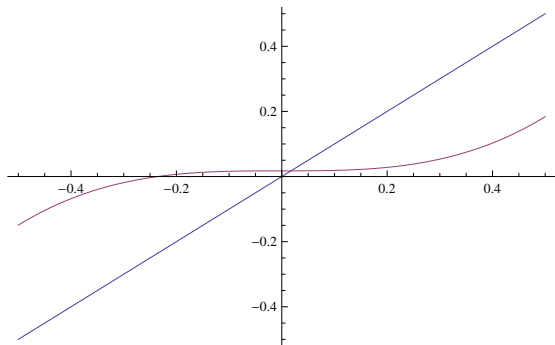


Figure: Al Kašijeva metoda

Za rezultat je dobil

0.017452406437283517.

Nekaj iteratov

0.017445318747647944240706209869692806243672751313388
0.017452397805531902625351278627224514439711700322460
0.017452406426767058303119085898706456328207791715605
0.017452406437270700139534222011971947561859311607099
0.017452406437283497209142180989179903015616796010512
0.017452406437283512800400260817335475190409144805927
0.017452406437283512819395807138408862707789904819499
0.017452406437283512819418950285561489537416288137846
0.017452406437283512819418978481921366481124613438813
0.017452406437283512819418978516274287674899321964125
0.017452406437283512819418978516316141417712084389074
0.017452406437283512819418978516316192410050626891378
0.017452406437283512819418978516316192472176936637810
0.017452406437283512819418978516316192472252627976412

Iteracija v kompleksnem

Omenjene metode lahko uporabimo na kompleksnih številih. Radi bi ugotovili, kakšni začetni približki so dopustni, da iteracija konvergira in če konvergira, kam. Prvi se je s tem sistematično ukvarjal Mandelbrot. Študiral je polinome oblike $x^2 + c$ za različne c .

Babilonska metoda za $\sqrt{3}$

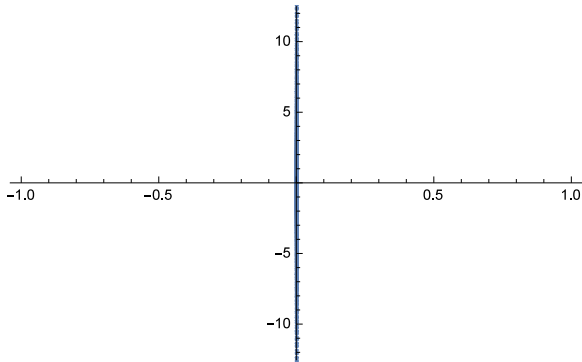


Figure: Točke, za katere metoda ne deluje

Newtonova metoda za $f(x) = x^4 - 1$

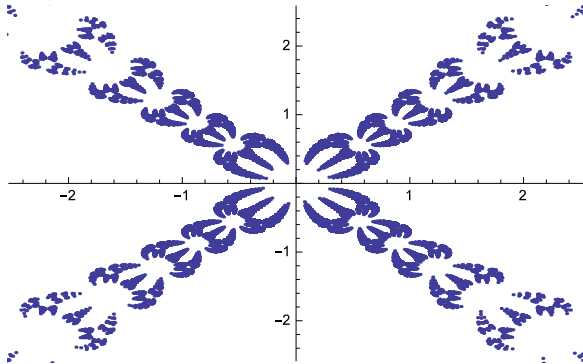


Figure: Točke, za katere metoda ne deluje

Al Kašijeva metoda v kompleksnem, $a = \sin 3^\circ$

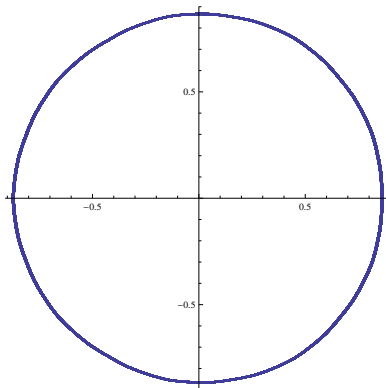


Figure: Točke, za katere metoda ne deluje

Ista metoda za $a = 1 + 2i$

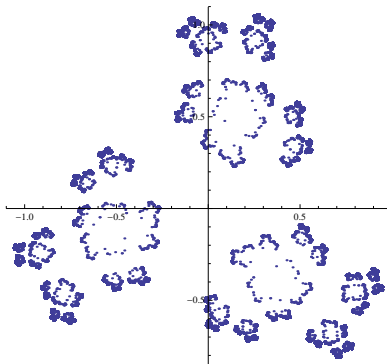


Figure: Točke, za katere metoda ne deluje

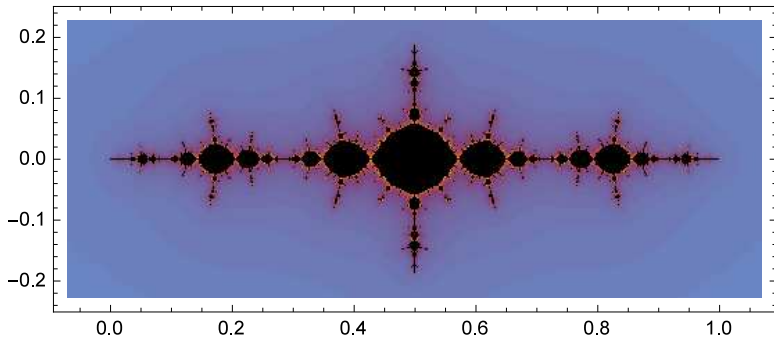


Figure: Logistična funkcija $f(x) = 3.5x(1 - x)$

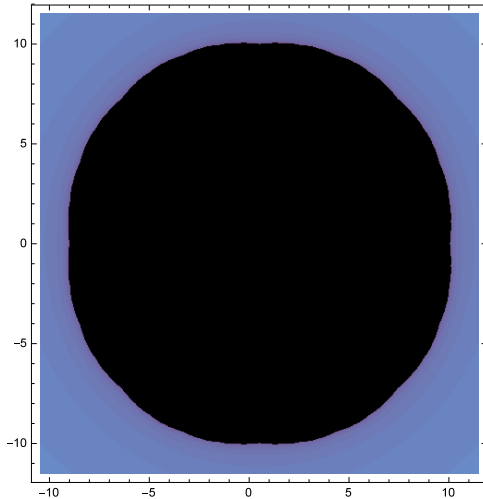


Figure: Logistična funkcija $f(x) = 0.1x(1-x)$

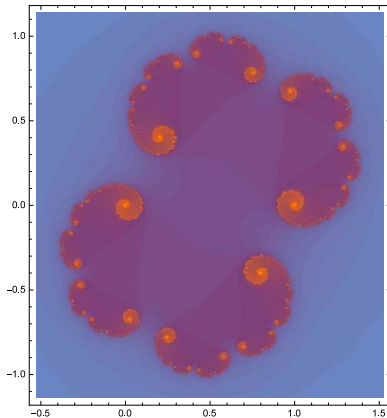


Figure: Logistična funkcija $f(x) = (1 + 0.5i)x(1 - x)$

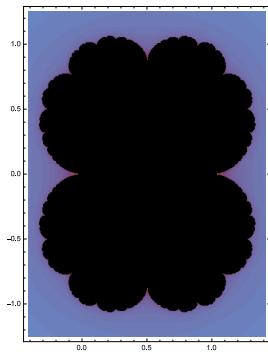


Figure: Logistična funkcija $f(x) = x(1 - x)$

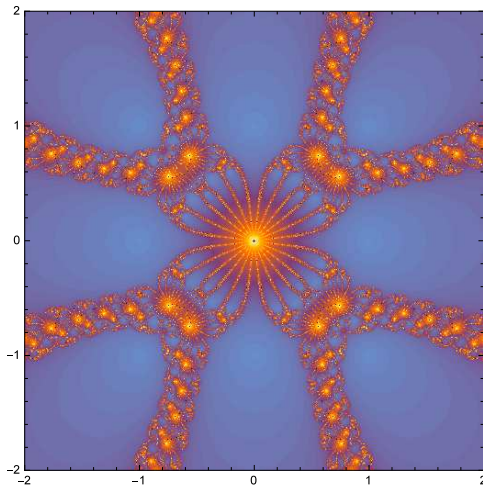


Figure: Newtonova metoda za $(x^4 - 1)(x^4 + 4)$

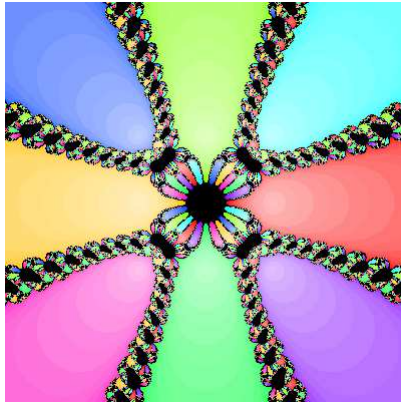


Figure: Newtonova metoda $(x^4 - 1)(x^4 + 4)$

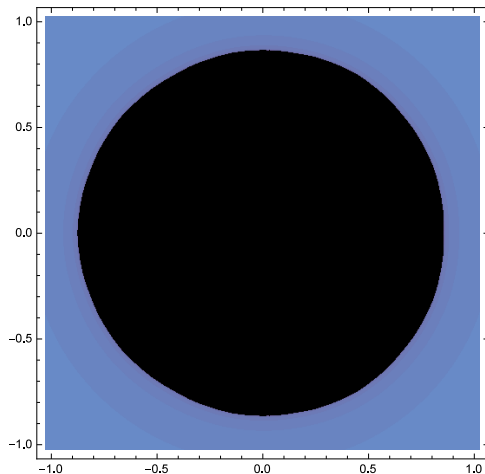


Figure: Klasična AI Kašijeva metoda

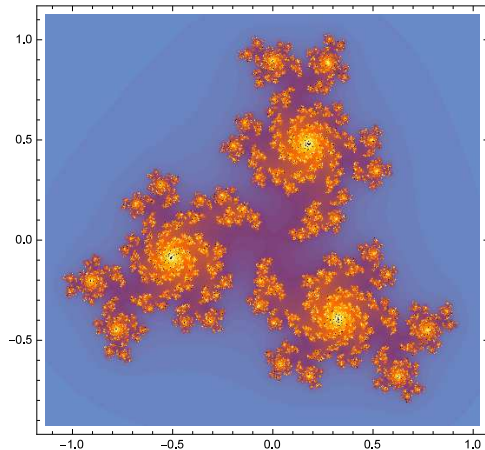


Figure: Al Kašijeva metoda pri parametru $a = 1 + 1.7i$

Mandelbrota je zanimalo, kako bi ločil polinome oblike $x^2 + c$, pri katerih je množica 'slabih' začetnih približkov - Juliajeva množica - povezana, od tistih, pri katerih je Juliajeva množica (popolnoma) nepovezana. Ugotovil je, da je to za parametre c iz t.i. Mandelbrotove množice, ki je tudi sama fraktal (natančneje, rob je fraktalen).

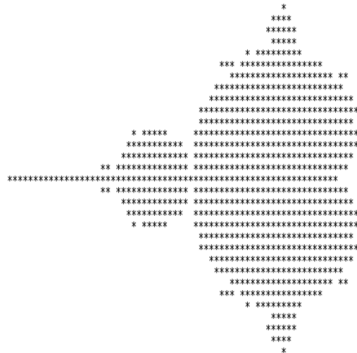


Figure: Mandelbrotova množica (Robert W. Brooks, Peter Matelski, 1978)

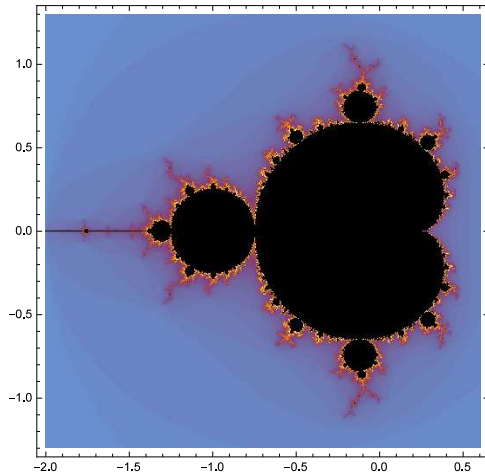


Figure: Mandelbrotova množica

'Definicija' fraktala

- samopodobnost pri poljubnih povečavah
- pri nobeni povečavi ni podoben delu krivulje ali ploskve
- običajno je definiran z iteracijami

Dimenzija in škatlasta dimenzija

dimenzija	množica	velikost roba r	število elementov N_r
$d = 1$	$A = [0, 1]$	$1/5$	5
$d = 2$	$A = [0, 1] \times [0, 1]$	$1/6$	36
$d = 3$	$A = [0, 1]^3$	$1/4$	64

Opazimo:

$$(1/r)^d = N \text{ oziroma } d = \frac{\log N}{\log(1/r)}.$$

Cantorjeva množica ima po tej logiki dimenzijo $\log(2)/\log(3)$, saj imamo na n -tem nivoju 2^n intervalov dolžine $1/3^n$.

Definicija škatlaste dimenzije je

$$d = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N}{\log(1/r)}$$

Ocene škatlaste dimenzije za 'naravne' fraktale so:

povr. pljuč	povr. možganov	brokoli	brit. obala	norv. obala
2,97	2,79	2,66	1,25	1,52

Uporaba

- kompresija slik, kodiranje
- meteorologija, astronomija
- elektrotehnika, strojništvo
- gradbeništvo
- medicina

Kompresija slik

Michael Barnsley prvi začne uporabljati fraktale za kompresijo slik (Fractal Image Format - FIF) Natančneje, kompresijo naredi s pomočjo iteracijskih funkcijskih sistemov (IFS).



Figure: Barnsleyeva praprot

Kodiranje

Poseben primer iteracij - imenujejo se hiperbolične preslikave na torusu - se lahko uporabljajo za skrivanje sporočil v slike (steganografija). Sliko transformiramo s preslikavo, ki ima visoko periodo. Naslovniku povemo podatke za preslikavo (4 števila) in kolikokrat jo mora uporabiti na sliki. Arnoldova mačka ima periodo 15.

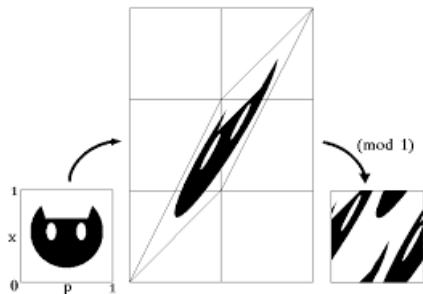


Figure: Arnoldova mačka

Meteorologija

Michel Henon je predlagal diskretno verzijo Lorenzovega modela atmosferske konvekcije (spremembe toplote zraka zaradi dvigovanja toplega zraka). To je preslikava oblike $(x, y) \mapsto (1 - 1.4x^2 + y, 0.3x)$. Preslikava je kaotčna - iterati točk ne konvergirajo, se pa približujejo množici, ki je znana kot Henonov čudni atraktor. Njegova fraktalna dimenzija je okoli 1.26.

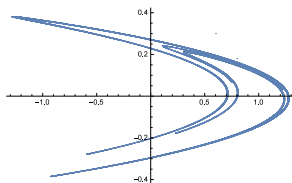


Figure: Henonov čudni atraktor

Astronomija

Astronomi se že dolgo časa ukvarjajo z vprašanjem, ali je naš sončni sistem stabilen. Poincaré je predlagal študij t.i. Poincarejevih prerezov. S tem pridemo do iteracijskih preslikav na ravnini.

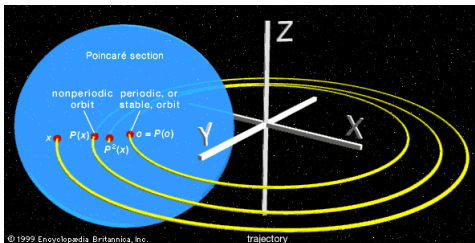


Figure: Poincarejeva preslikava (Enc. Britannica)

Elektrotehnika

Konstrukcija fraktalnih anten. Lahko so manjše, dosežejo širši pas frekvenc in imajo manj izgub.

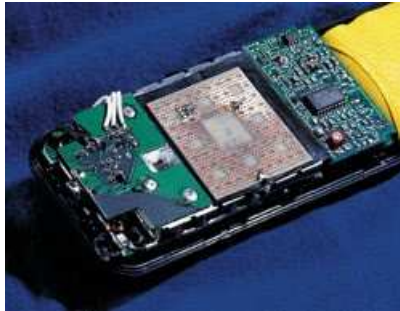


Figure: Antena v obliki preproge Sierpinskega (Fracantenna Inc.)

Strojništvo

Za ohlajanje vezij je bil razvit model na osnovi fraktalne strukture krvožilja, ki je uspešno pri prenosu snovi po telesu.

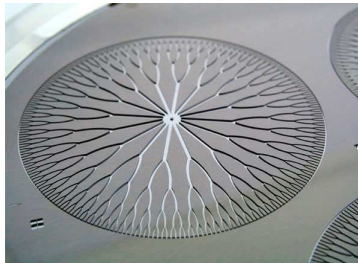


Figure: Profil za hlajenje (Tanner Labs)

Gradbeništvo

Jeklene pletenice imajo samopodobnostno strukturo.

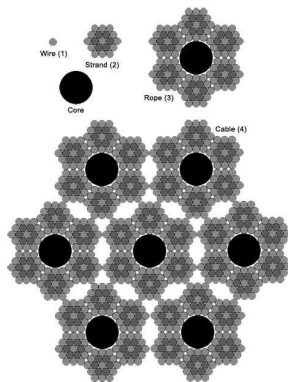


Figure: Pletenica

Medicina

Diagnostika: slike CT, MR vsebujejo ogromno podatkov, ki jih s prostim očesom ne zaznamo, lahko pa pomagajo pri zgodnjem odkrivanju bolezni.

- rakasto pljučno tkivo ima drugačno škatlasto dimenzijo od zdravega
- še pred pojavom tumorja se spremeni struktura krvožilja na nivoju kapilar - stopnja samopodobnosti se zmanjša.
- mitohondrijska membrana ima fraktalno strukturo
- spremembe škatlaste dimenzije citoplazemskih struktur pri uporabi različnih steroidov

- levkemija: škatlasta dimenzija membrane levkocitov pri levkemiji je znatno manjša kot pri zdravih levkocitih
- možgani: anatomske, funkcionalne, molekularne lastnosti so fraktalne
-

(www.medicographia.com)

Hvala za pozornost!