Od najmanjših kvadratov do delovanja CT naprave

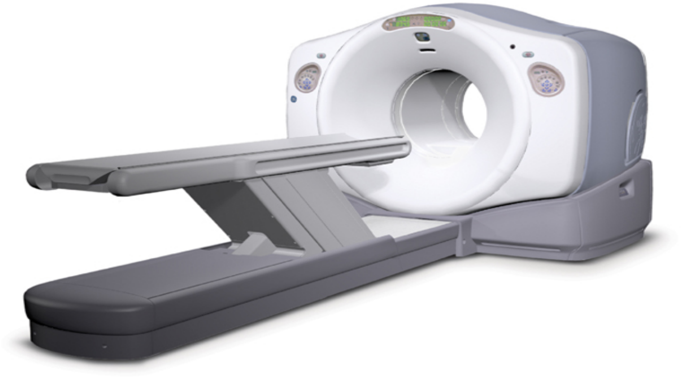
Marko Orel

UP FAMNIT

Struktura predstavitve

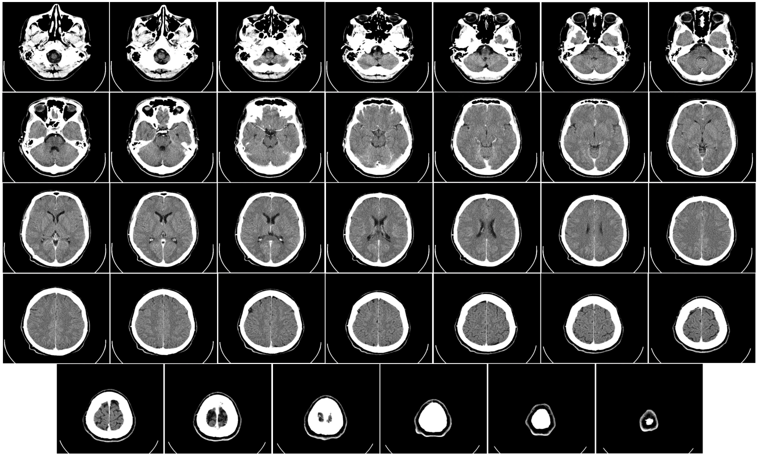
- **Opis problema**
- **Matematična orodja**
  - matrike
  - reševanje linearnih enačb
  - funkcije 2 spremenljivk
  - krivuljni integral 1. vrste
- **Rešitev problema**

Kaj je CT naprava oz. tomograf?



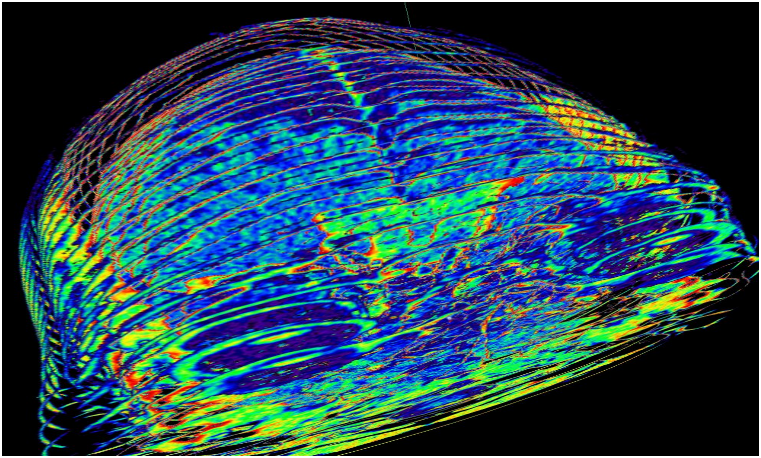
Slika 1: Sodoben tomograf.

Kaj proizvede CT?



Slika 2: Slike ‘rezin’ možganov.

3D



Slika 3: Sodobne tehnike lahko ‘rezine’ zložijo v 3D sliko, a bistvo, ki nas tukaj zanima, je kako dobiti posamezno ‘rezino’.

Nobelova nagrada

Leta 1979 sta Nobelovo nagrado za medicino in fiziologijo prejela:

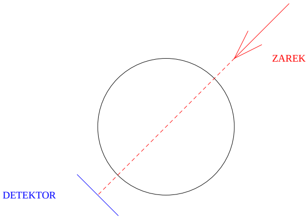
- A. M. Cormack (fizik)
- G. N. Hounsfield (elektro inženir)

Nagrado sta prejela za opravljeno delo v 60. in 70. letih prejšnjega stoletja. Matematični algoritmi, ki sta ju razvila, predstavljajo temelje tako prve CT naprave kot tudi današnjih CT naprav. Delovala sta neodvisno in tudi razvila različne algoritme. Cormack je na novo odkril matematiko, ki jo je na začetku stoletja razvil matematik J. Radon.

- Cormackova metoda (veliko 'integralov'; še vedno predstavlja temelje sodobnih naprav)
- Hounsfieldova metoda (osnovana na metodi najmanjših kvadratov; uporabljena pri prvi CT napravi)

Problem

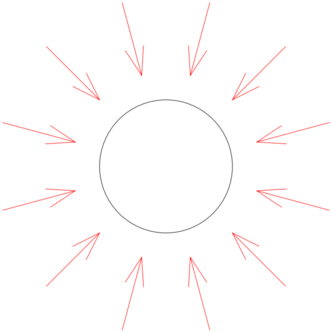
Ko gre rentgenski žarek skozi telo, se nekaj fotonov absorbira vanj.



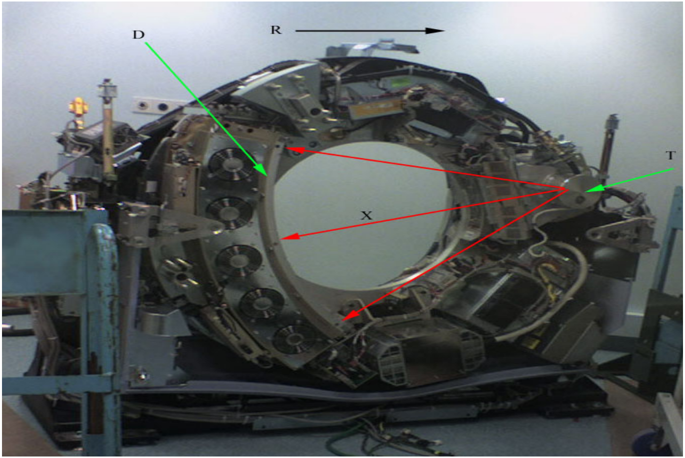
Delež teh fotonov predstavlja t.i. *atenuacijski* oz. *oslabitveni koeficient* (ang. *attenuation coefficient*), ki je od točke do točke telesa načeloma različen (kost ima visok oslabitveni koeficient, zrak ima skoraj ničelnega, voda/kri pa je nekje vmes). Koliko žarka pride ven na drugi strani telesa lahko zmerimo z detektorjem.

Problem

Meritve lahko opravimo za različno usmerejene žarke okoli telesa (‘rezine’). Cilj je s pomočjo teh meritev določiti oslabitveni koeficient na dani ‘rezini’ telesa. **Kako to narediti, je naš matematični problem.** Ko enkrat oslabitveni koeficient določimo, višje vrednosti v ‘rezini’ pobarvamo z bolj svetlo barvo, nižje vrednosti pa z bolj temno, kar nam porodi iskano sliko (slika zunaj telesa je tako črna).



Zgradba CTja



Slika 4: V resnici žarki in detektorji niso povsod, ampak se naprava vrti.

Matrike

Primer matrike:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 0.5 & 1.3 & \pi \\ 0 & 11 & \frac{5}{3} & \sqrt{2} & -2 \\ 2 & -2 & 7 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

Zgornja matrike je oblike 4×5.

Matrike

1. **Seštevanje matrik** enakih oblik.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ 9 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2, & -1+4 \\ 0+1, & 1+2 \\ 9+3, & -5+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$$

2. **Množenje matrike s številom.**

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2, & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 0, & 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot 3 = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3, & (-1) \cdot 3 \\ 0 \cdot 3, & 1 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrike

1. **Seštevanje matrik** enakih oblik.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ 9 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2, & -1+4 \\ 0+1, & 1+2 \\ 9+3, & -5+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$$

2. **Množenje matrike s številom.**

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2, & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 0, & 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot 3 = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3, & (-1) \cdot 3 \\ 0 \cdot 3, & 1 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Transponiranje matrike. *Transponiranko* matrike dobimo tako, da vrstice matrike zapišemo kot stolpce (in stolpce kot vrstice).

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^{\top} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

4. Množenje matrik.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ 9 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3\cdot 2+(-1)\cdot 1, & 3\cdot 4+(-1)\cdot 2, & 3\cdot 1+(-1)\cdot 0 \\ 0\cdot 2+1\cdot 1, & 0\cdot 4+1\cdot 2, & 0\cdot 1+1\cdot 0 \\ 9\cdot 2+(-5)\cdot 1, & 9\cdot 4+(-5)\cdot 2, & 9\cdot 1+(-5)\cdot 0 \\ (-3)\cdot 2+2\cdot 1, & (-3)\cdot 4+2\cdot 2, & (-3)\cdot 1+2\cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 10 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 13 & 26 & 9 \\ -4 & -8 & -3 \end{bmatrix}$$

Matrike

Če je matrika A oblike $m \times p$ in je matrika B oblike $p \times n$, potem lahko izračunamo produkt AB, ki je oblike $m \times n$.

Vrstni red množenja matrik je pomemben! V zgornjem primeru

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ 9 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 13 & 26 & 9 \\ -4 & -8 & -3 \end{bmatrix}, \quad BA \text{ ne obstaja.}$$

5. Inverz matrike. Inverz matrike A, ki ima enako stolpcev kot vrstic, je taka matrika A^{-1}, da velja

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Z računalnikom hitro izračunamo, da velja

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -3 \\ -3 & -\frac{1}{2} & -2 \\ -5 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

5. Inverz matrike. Inverz matrike A, ki ima enako stolpcev kot vrstic, je taka matrika A^{-1}, da velja

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Z računalnikom hitro izračunamo, da velja

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -3 \\ -3 & -\frac{1}{2} & -2 \\ -5 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Sistem m linearnih enačb z n neznankami

Sistem 2 enačb z 2 nezankama

$$\begin{aligned} 1 &= 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \\ -4 &= 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \end{aligned}$$

ima natanko eno rešitev $x_1 = 17$, $x_2 = -11$.

Sistem 3 enačb z 2 nezankama

$$\begin{aligned} 1 &= 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \\ -4 &= 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \\ -2 &= 5 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 \end{aligned}$$

nima rešitve. Zato lahko govorimo le o 'najbolj natančni' rešitvi.

Sistem m linearnih enačb z n neznankami

Sistem 2 enačb z 2 nezankama

$$\begin{aligned} 1 &= 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \\ -4 &= 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \end{aligned}$$

ima natanko eno rešitev $x_1 = 17$, $x_2 = -11$.
Sistem 3 enačb z 2 nezankama

$$\begin{aligned} 1 &= 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \\ -4 &= 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \\ -2 &= 5 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 \end{aligned}$$

nima rešitve. Zato lahko govorimo le o 'najbolj natančni' rešitvi.

Sistem m linearnih enačb z n neznankami

$$
\begin{aligned}
b_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\
b_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\
&\vdots \\
b_m &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n
\end{aligned}
$$

lahko prepišemo v

$$\mathbf{b} = A\mathbf{x},$$

Sistem m linearnih enačb z n neznankami

kjer je

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Če je enačb več kot neznank, potem sistem tipično nima rešitve, matrika $A^\top A$ pa ima inverz. Tedaj 'najbolj točno' rešitev sistema enačb dobimo s formulo

$$\mathbf{x} = (A^\top A)^{-1} A^\top \mathbf{b}$$

Funkcije dveh spremenljivk

Nekaj primerov:

- $f(x, y) = x + y + 2$,
- $g(x, y) = x^2 - y^2$,
- $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$,
- Nadmorska višina(z. širina, z. dolžina)

- $f(3, 4) = 3 + 4 + 2 = 9$
- Nadmorska višina$(46.378, 13.836) \doteq 2864$.
  Tukaj so argumenti v stopinjah, vrednost funkcije v metrih, pri čemer sta $(46.378, 13.836)$ sta zemljepisna širina in dolžina Triglava.

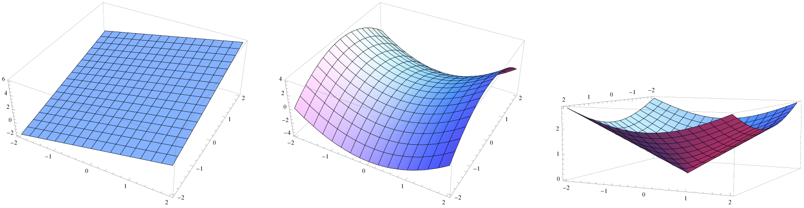
Funkcije dveh spremenljivk

Nekaj primerov:

- $f(x,y) = x + y + 2$,
- $g(x,y) = x^2 - y^2$,
- $h(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$,
- Nadmorska višina(z. širina, z. dolžina)

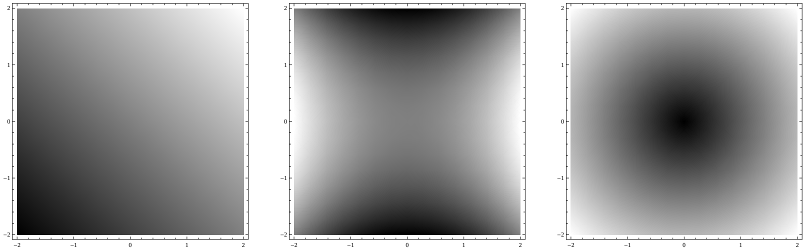
- $f(3,4) = 3 + 4 + 2 = 9$
- Nadmorska višina$(46.378, 13.836) \doteq 2864$.
  Tukaj so argumenti v stopinjah, vrednost funkcije v metrih, pri čemer sta $(46.378, 13.836)$ sta zemljepisna širina in dolžina Triglava.

Funkcije dveh spremenljivk



Slika 5: Grafi funkcij f, g in h.

Funkcije dveh spremenljivk



Slika 6: Vrednosti funkcij f, g in h so prikazane z odtenkom sive barve. Višje vrednosti so svetlejše. Pri funkciji nadmorske višine bi na območju Slovenije bila najbolj svetla pika na lokaciji Triglava.

Krivuljni integral 1. vrste po daljici

Naj bo K daljica in naj funkcija $f(x, y)$ zavzame vrednost 1 na nekem kvadratku, zunaj njega pa naj zavzame vrednost 0. Tedaj za krivuljni integral velja

$$\int_K f ds = \begin{array}{l}\text{dolžina tistega dela daljice } K, \text{ ki se} \\ \text{nahaja znotraj omenjenega kvadratka.}\end{array}$$

Lastnosti krivuljnega integrala:

$$\int_K \alpha f ds = \alpha \int_K f ds \qquad \text{za vsa števila } \alpha,$$

$$\int_K (f+g) ds = \int_K f ds + \int_K g ds.$$

Krivuljni integral 1. vrste po daljici

Naj bo K daljica in naj funkcija $f(x, y)$ zavzame vrednost 1 na nekem kvadratku, zunaj njega pa naj zavzame vrednost 0. Tedaj za krivuljni integral velja

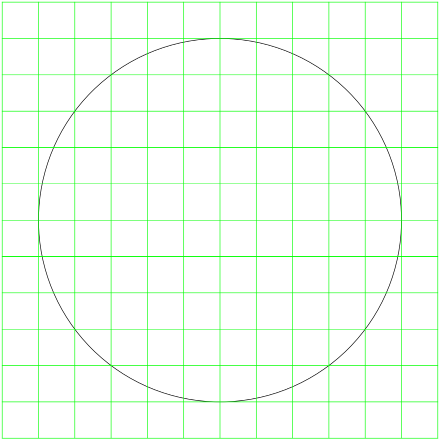
$$\int_K fds = \begin{array}{l}\text{dolžina tistega dela daljice } K, \text{ ki se} \\ \text{nahaja znotraj omenjenega kvadratka.}\end{array}$$

Lastnosti krivuljnega integrala:

$$\begin{aligned}\int_K \alpha fds &= \alpha \int_K fds \qquad \text{za vsa števila } \alpha, \\ \int_K (f+g)ds &= \int_K fds + \int_K gds.\end{aligned}$$

Hounsfieldova metoda

Našo iskano sliko razdelimo na $k \times k$ pikslov, ki jih oštevilčimo od 1 do k^2, in vse skupaj postavimo v nek koordinatni sistem.



Hounsfieldova metoda

Oslabitveni koeficient $\mathcal{AC}(x, y)$ je funkcija dveh spremenljivk, ki jo je potrebno določiti. Če je mreža (tj. resolucija) dovolj drobna, se lahko pretvarjamo, da je oslabitveni koeficient na posameznem pikslu povsod enak (vsak piksel bo pobarvan le z eno barvo). Naj bo α_j vrednost oslabitvenega koeficienta v j-tem pikslu ($j = 1, 2, \ldots, k^2$). Definiramo funkcije

$$p_j(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{če točka } (x, y) \text{ leži v j-tem pikslu,} \\ 0, & \text{če točka } (x, y) \text{ ne leži v j-tem pikslu.} \end{cases}$$

Tedaj je

$$\mathcal{AC}(x, y) \doteq \alpha_1 p_1(x, y) + \alpha_2 p_2(x, y) + \cdots + \alpha_{k^2} p_{k^2}(x, y). \quad (1)$$

Hounsfieldova metoda

Oslabitveni koeficient $\mathcal{AC}(x, y)$ je funkcija dveh spremenljivk, ki jo je potrebno določiti. Če je mreža (tj. resolucija) dovolj drobna, se lahko pretvarjamo, da je oslabitveni koeficient na posameznem pikslu povsod enak (vsak piksel bo pobarvan le z eno barvo). Naj bo α_j vrednost oslabitvenega koeficienta v j-tem pikslu ($j = 1, 2, \dots, k^2$). Definiramo funkcije

$$p_j(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{če točka } (x, y) \text{ leži v j-tem pikslu}, \\ 0, & \text{če točka } (x, y) \text{ ne leži v j-tem pikslu}. \end{cases}$$

Tedaj je

$$\mathcal{AC}(x, y) \doteq \alpha_1 p_1(x, y) + \alpha_2 p_2(x, y) + \cdots + \alpha_{k^2} p_{k^2}(x, y). \quad (1)$$

Hounsfieldova metoda

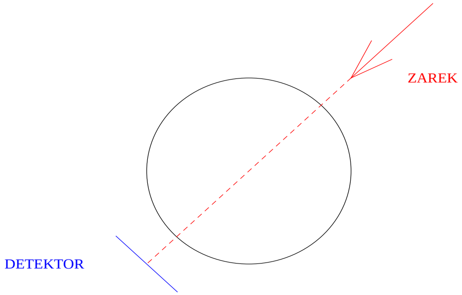
Oslabitveni koeficient $\mathcal{AC}(x,y)$ je funkcija dveh spremenljivk, ki jo je potrebno določiti. Če je mreža (tj. resolucija) dovolj drobna, se lahko pretvarjamo, da je oslabitveni koeficient na posameznem pikslu povsod enak (vsak piksel bo pobarvan le z eno barvo). Naj bo α_j vrednost oslabitvenega koeficienta v j-tem pikslu ($j = 1, 2, \dots, k^2$). Definiramo funkcije

$$p_j(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{če točka } (x,y) \text{ leži v j-tem pikslu,} \\ 0, & \text{če točka } (x,y) \text{ ne leži v j-tem pikslu.} \end{cases}$$

Tedaj je

$$\mathcal{AC}(x,y) \doteq \alpha_1 p_1(x,y) + \alpha_2 p_2(x,y) + \cdots + \alpha_{k^2} p_{k^2}(x,y). \quad (1)$$

Hounsfieldova metoda



Vsak žarek predstavlja neko daljico K od izvora do detektorja. To kar detektor izmeri, je enako $\int_K \mathcal{AC} ds$. Če uporabimo I žarkov in opravimo I meritev, dobimo za daljice $K_1, K_2, \ldots, K_I$ naslednje vrednosti

$$b_i := \int_{K_i} \mathcal{AC} ds \qquad (i = 1, 2, \ldots, I).$$

Hounsfieldova metoda

Iz enačbe (1) sledi

$$b_i \doteq \alpha_1 \int_{K_i} p_1 ds + \alpha_2 \int_{K_i} p_2 ds + \cdots + \alpha_{k^2} \int_{K_i} p_{k^2} ds \ (i = 1, 2, \ldots, l),$$

Pri tem je vrednost $\int_{K_i} p_j ds$, ki jo bomo označili z a_{ij}, dolžina tistega dela daljice K_i, ki je znotraj j-tega piksla. Ker je slednje preprosto izračunati, se lahko pretvarjamo, da to poznamo. Imamo torej sistem l linearnih enačb s k^2 neznankami $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k^2}$:

$$\begin{aligned} b_1 &\doteq \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \cdots + \alpha_{k^2} a_{1k^2} \\ b_2 &\doteq \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \cdots + \alpha_{k^2} a_{2k^2} \\ &\vdots \\ b_l &\doteq \alpha_1 a_{l1} + \alpha_2 a_{l2} + \cdots + \alpha_{k^2} a_{lk^2}, \end{aligned}$$

Hounsfieldova metoda

kar lahko prepišemo v matrično obliko

$$\mathbf{b} \doteq A\mathbf{x},$$

kjer je

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_l \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k^2} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k^2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{lk^2} \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{k^2} \end{bmatrix}.$$

Metoda najmanjših kvadratov nam pove, da je najboljša rešitev, v kolikor inverz $(A^\top A)^{-1}$ obstaja, enaka

$$\mathbf{x} = (A^\top A)^{-1} A^\top \mathbf{b},$$

Hounsfieldova metoda

kar nam poda vrednosti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k^2}$, oziroma barve posameznih pikslov.

Ena izmed slabosti Hounsfieldove metode

Če je število meritev I manjše od resolucije k^2 (tj. števila pikslov), potem inverz $(A^\top A)^{-1}$ zagotovo ne obstaja. Tipičen scan ima 200 'snopov žarkov', vsak v 180 smereh, torej skupaj $I = 200 \times 180 = 36000$ merjenj. Če je resolucija npr. $k^2 = 160 \times 160 = 25600$, potem je $I > k^2$ in inverz (najverjetneje) obstaja. Če povečamo resolucijo na npr. $k^2 = 256 \times 256 = 65536$ pikslov, potem je $I < k^2$ in inverz $(A^\top A)^{-1}$ ne obstaja. Slednje je en izmed razlogov, zakaj se Hounsfieldova metoda ne uporablja več, saj imajo sodobne naprave še precej večjo resolucijo.

Viri

- Slika 1: http://www.ccsb.org/Patients_Family/Medical_Care_Support/Nuclear_Medicine/Technology/PET_CT_Positron_Emission_Tomography_Computed_Tomography_/
- Slika 2: "Computed tomography of human brain - large" by Department of Radiology, Uppsala University Hospital. Uploaded by Mikael Häggström. - Radiology, Uppsala University Hospital. Brain supplied by Mikael Häggström. It was taken Mars 23, 2007, after an incidence of homonymous hemianopsia, but nothing strange was found. Three episodes of scotoma occurred in the following years, whereof the last one was scintillating (depiction). Otherwise, there were no further neurological symptoms.. Licensed under CC0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Computed_tomography_of_human_brain_-_large.png#mediaviewer/File:Computed_tomography_of_human_brain_-_large.png
- Slika 3: "CT Scan of Dale Mahalko's brain-skull" by Dale Mahalko - Own work. Licensed under CC BY-SA 3.0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:CT_Scan_of_Dale_Mahalko%27s_brain-skull.jpg#mediaviewer/File:CT_Scan_of_Dale_Mahalko%27s_brain-skull.jpg
- Slika 4: "Ct-internals". Licensed under CC BY-SA 3.0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ct-internals.jpg#mediaviewer/File:Ct-internals.jpg

Za nadaljnje branje je priporočena knjiga: T. G. Feeman, The Mathematics of Medical Imaging. A Beginner's Guide. Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology, Springer, 2010.