Catalanova števila

Matjaž Konvalinka

23. oktober 2013

Kombinatorika

Kombinatorika je veja matematike, ki se ukvarja s preštevanjem.

Primer: izbrati moramo nekaj ljudi iz množice n ljudi. Na koliko načinov lahko to naredimo?

Za vsakega človeka se odločimo, ali ga bomo izbrali ali ne, se pravi imamo dve možnosti.

Izbire so med seboj neodvisne, zato imamo skupaj

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n} = 2^n$$

možnosti.

Razvrščanje v vrsto

Na koliko načinov lahko n ljudi razvrstimo v vrsto?

Na prvo mesto postavimo kateregakoli izmed n ljudi, na drugo mesto kateregakoli izmed preostalih $n-1$ ljudi, na tretje mesto kateregakoli izmed preostalih $n-2$ ljudi itd.

Skupaj imamo torej

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

možnosti (preberemo "n fakulteta").

Primer: Tri ljudi razvrstimo v vrsto na $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načinov, šest ljudi pa na $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ načinov.

Pa še razvrščanje v krajšo vrsto

Kaj pa, če izmed n ljudi v vrsto razvrstimo samo k ljudi?

Zdaj je možnosti

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Primer: Za $n = 5$ in $k = 2$ imamo $5 \cdot 4 = 20$ možnosti za $n = 7$ in $k = 3$ pa $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ možnosti.

$$12|13|14|15|21|23|24|25|31|32|34|35|41|42|43|45|51|52|53|54$$

Nekatere od teh vrst vsebujejo iste ljudi.

Natančneje, vsaka izbira k ljudi se pojavi $k!$-krat med vrstami k ljudi, izbranih izmed n ljudi.

Binomski koeficienti

Zato je izbir k ljudi izmed n ljudi enako

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Temu izrazu rečemo binomski koeficient in je eden ključnih objektov v kombinatoriki. Oznaka: $\binom{n}{k}$ ("n nad k")

Primer: Od 7 ljudi lahko 3 ljudi izberemo na

$$\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35$$

načinov.

Razvoj binoma

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$$

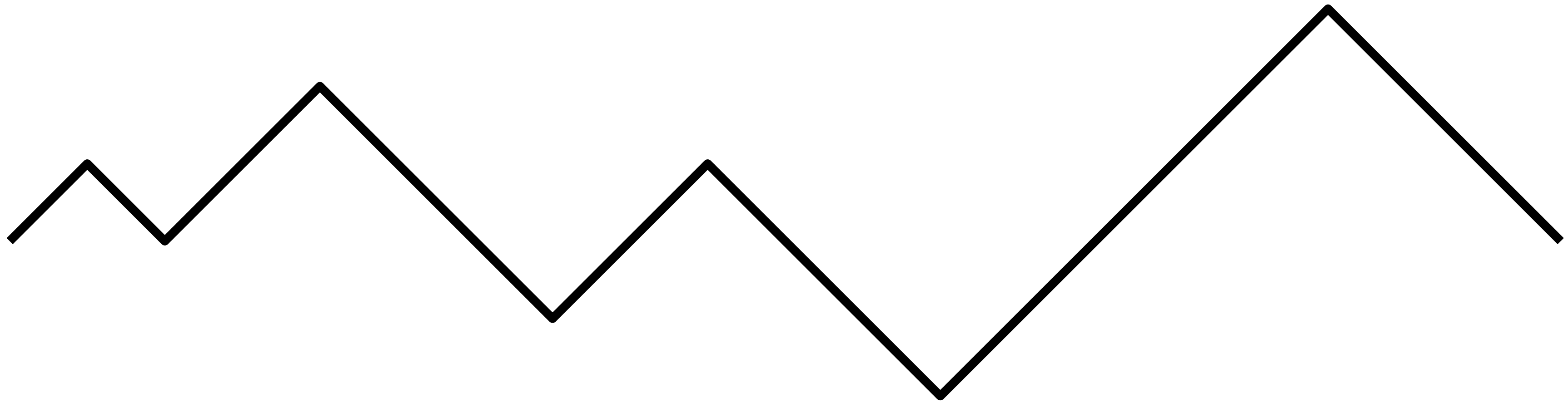
$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$$

$$(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$$

Ko razvijamo $(1+x)^n$, so koeficienti ravno binomski koeficienti $\binom{n}{k}$.

Število poti

Koliko je poti od $(0,0)$ do $(2n,0)$ s koraki $(1,1)$ in $(1,-1)$?



Pišimo G za korak navzgor in D za korak navzdol.

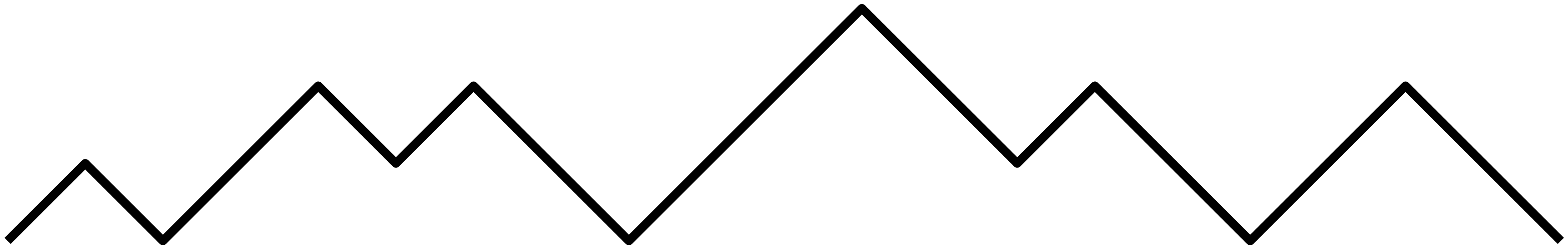
GDGGDDDGGDDDGGGGDDD

Imamo $2n$ črk, od tega n G-jev in n D-jev.

Mesta za G-je izberemo na $\binom{2n}{n}$ načinov.

Število Dyckovih poti

Koliko je poti od $(0,0)$ do $(2n,0)$ s koraki $(1,1)$ in $(1,-1)$, ki se nikoli ne spustijo pod x os?



Spet pišimo G za korak navzgor in D za korak navzdol.

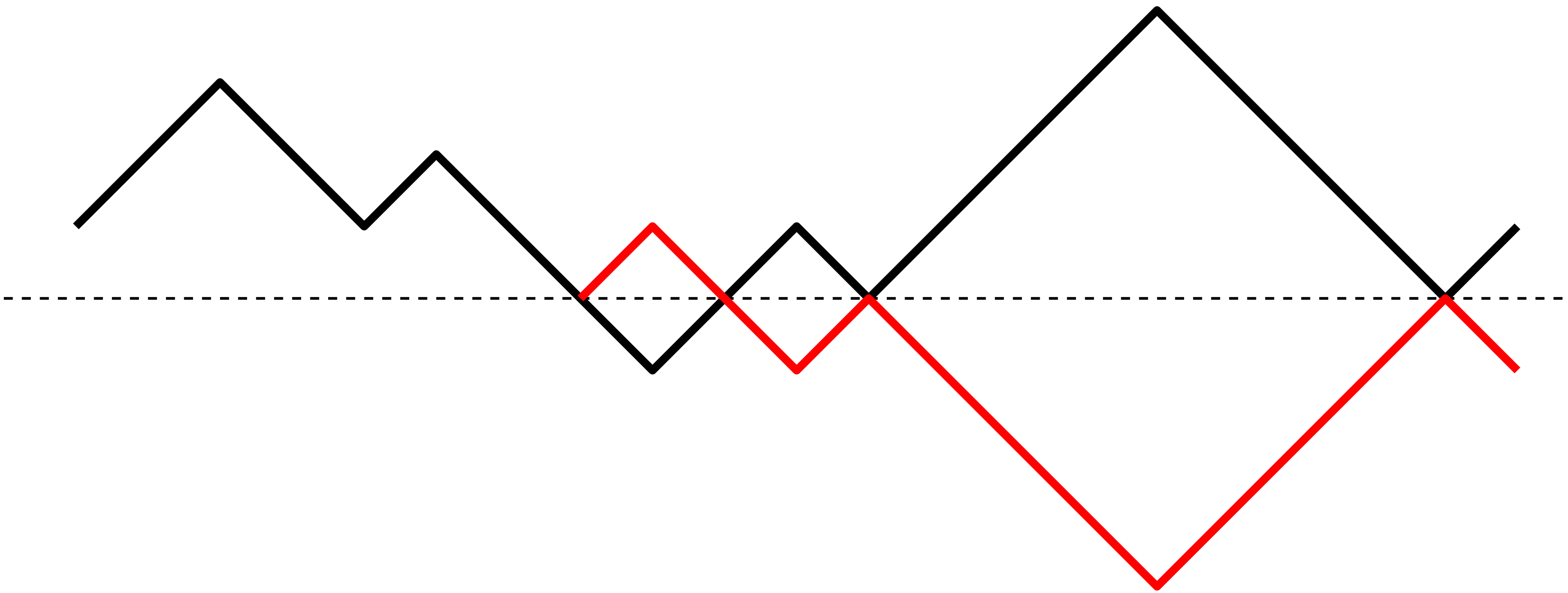
GDGGDGDDGGGDDGDDGGDD

Poti od $(0,0)$ do $(2n,0)$, ki se ne spustijo pod x os, so "dobre", tiste, ki se, so "slabe".

Število Dyckovih poti

Število dobrih poti je enako številu vseh poti, od katerega odštejemo število vseh slabih poti.

Vsaka slaba pot v nekem trenutku pride na višino -1. Od tam naprej prezrcalimo pot preko osi $y = -1$.



Število Dyckovih poti

Število slabih poti je enako številu vseh poti od $(0,0)$ do $(2n,-2)$ s koraki $(1,1)$ in $(1,-1)$.

Izberemo $2n$ črk, od tega $n-1$ G-jev in $n+1$ D-jev.

Takih izbir je

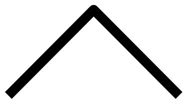
$$\binom{2n}{n+1}.$$

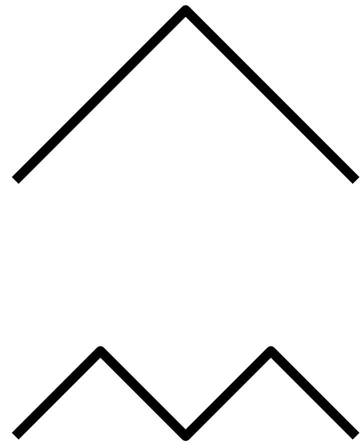
Zato je število Dyckovih (dobrih) poti enako

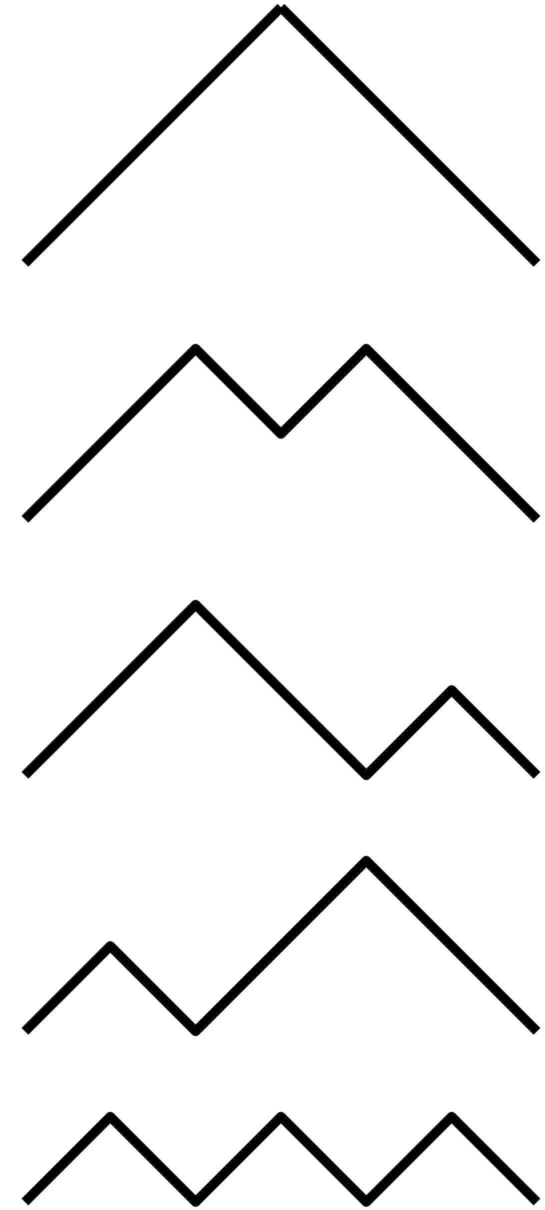
$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Temu številu rečemo Catalanovo število in ga označimo s C_n.

Primeri





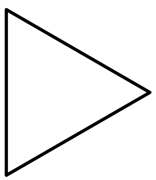


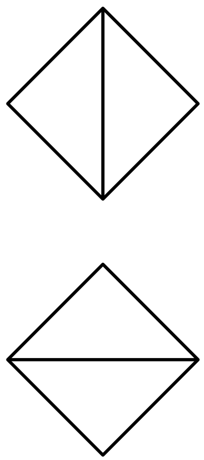
$$1, 2, 5, 14, 42, 132, \ldots$$

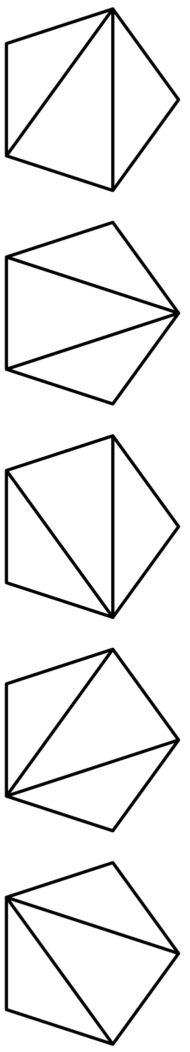
$$\frac{1}{4}\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5$$

Koliko je...

... triangulacij večkotnika?







$$1, 2, 5, 14, 42, 132, \ldots$$

Koliko je...

... pravilnih postavitev oklepajev?

$t_0 t_1$

$(t_0 t_1) t_2$

$t_0 (t_1 t_2)$

$((t_0 t_1) t_2) t_3$

$(t_0 (t_1 t_2)) t_3$

$(t_0 t_1)(t_2 t_3)$

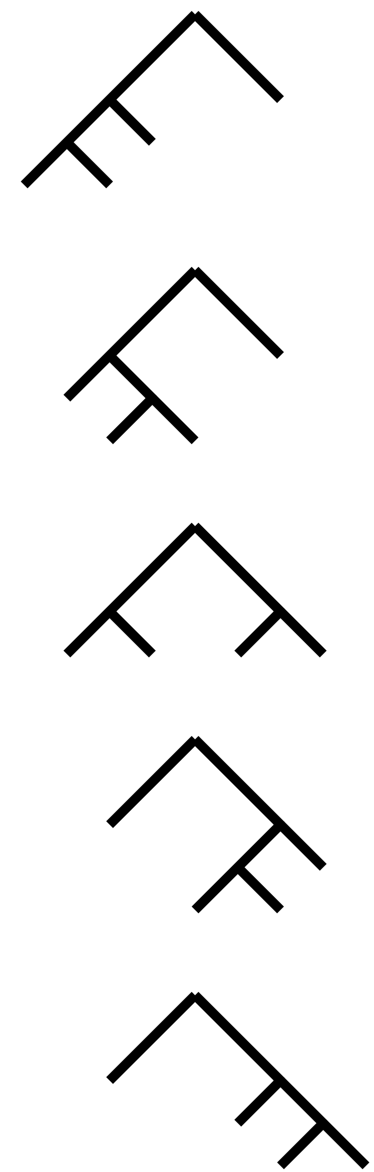
$t_0 ((t_1 t_2) t_3)$

$t_0 (t_1 (t_2 t_3))$

$$1, 2, 5, 14, 42, 132, \ldots$$

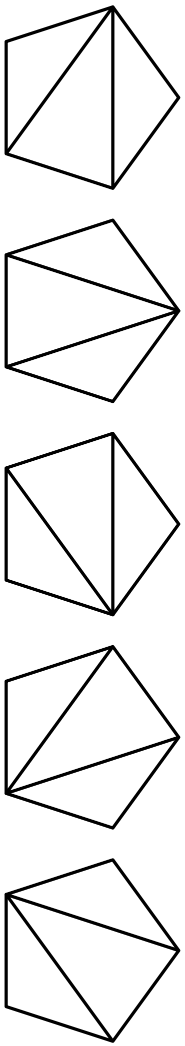
Koliko je...

... polnih binarnih dreves?



$$1, 2, 5, 14, 42, 132, \ldots$$

Vedno isti odgovor?



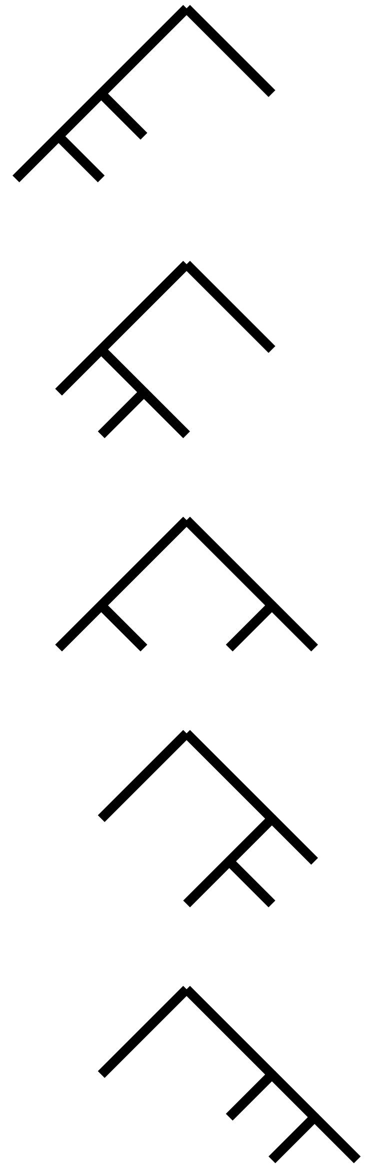
$((t_0 t_1) t_2) t_3$

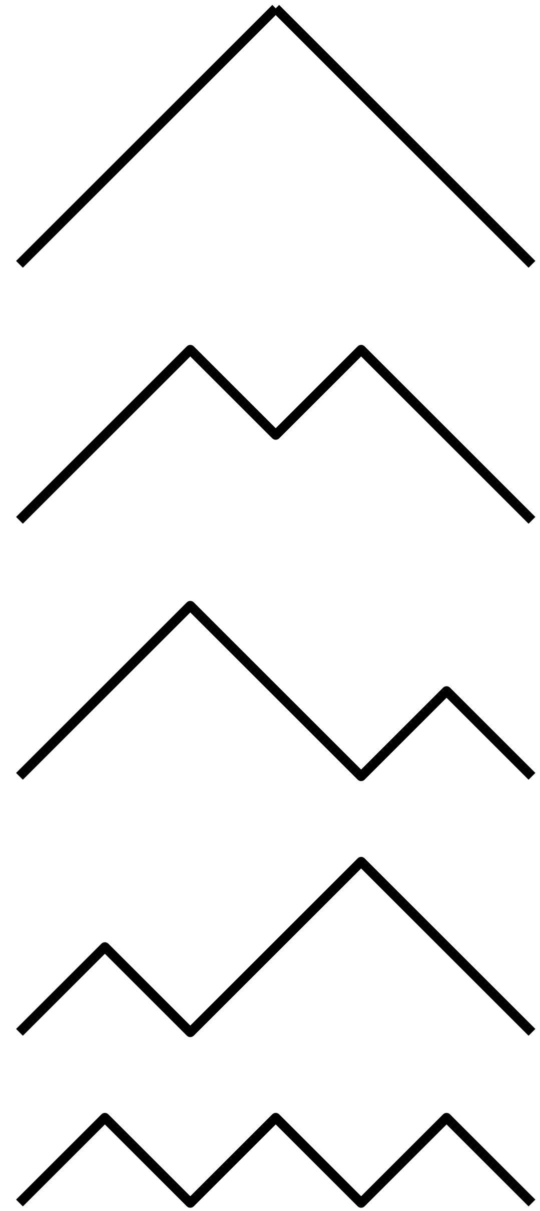
$(t_0 (t_1 t_2)) t_3$

$(t_0 t_1)(t_2 t_3)$

$t_0((t_1 t_2) t_3)$

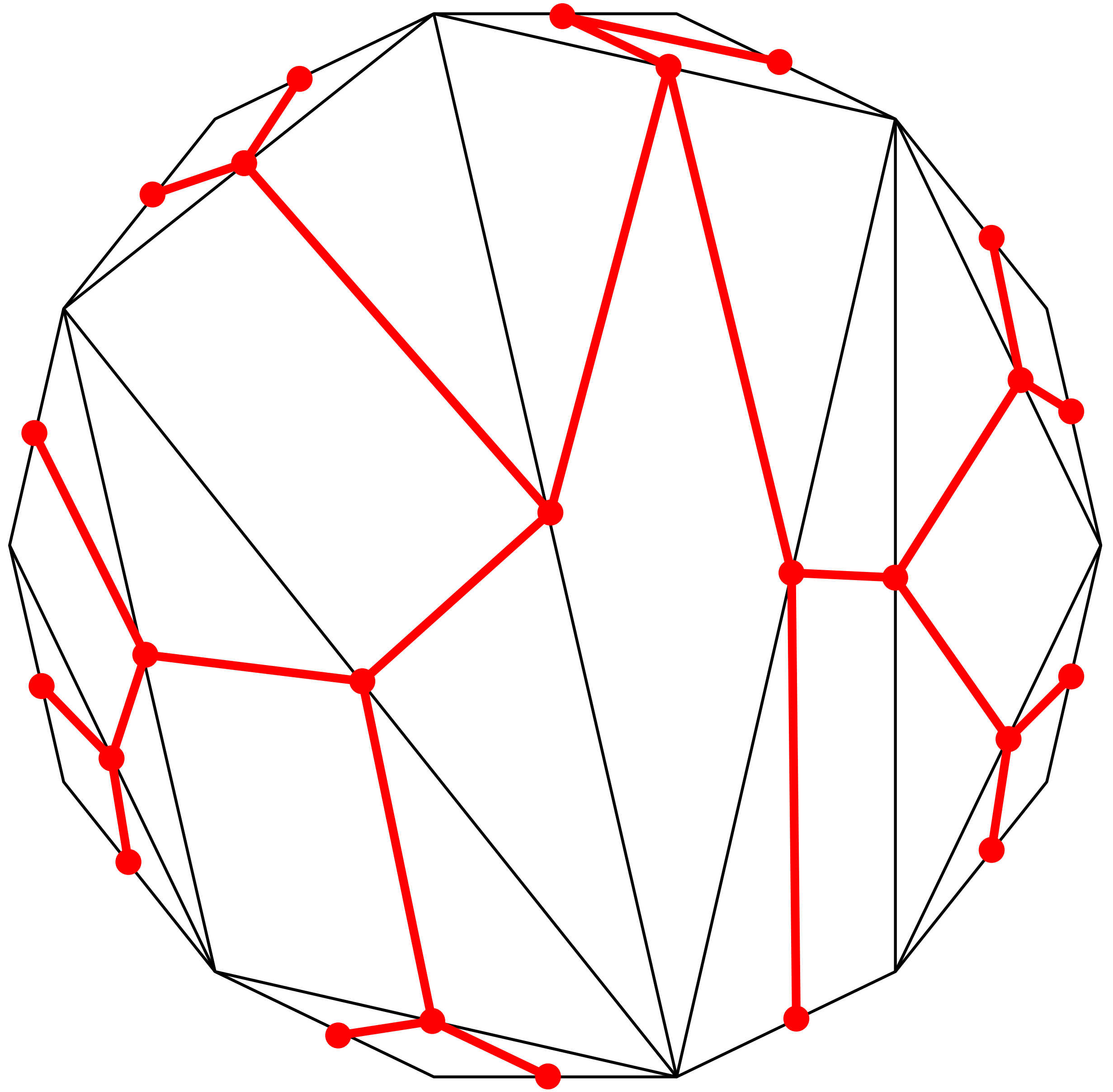
$t_0(t_1(t_2 t_3))$



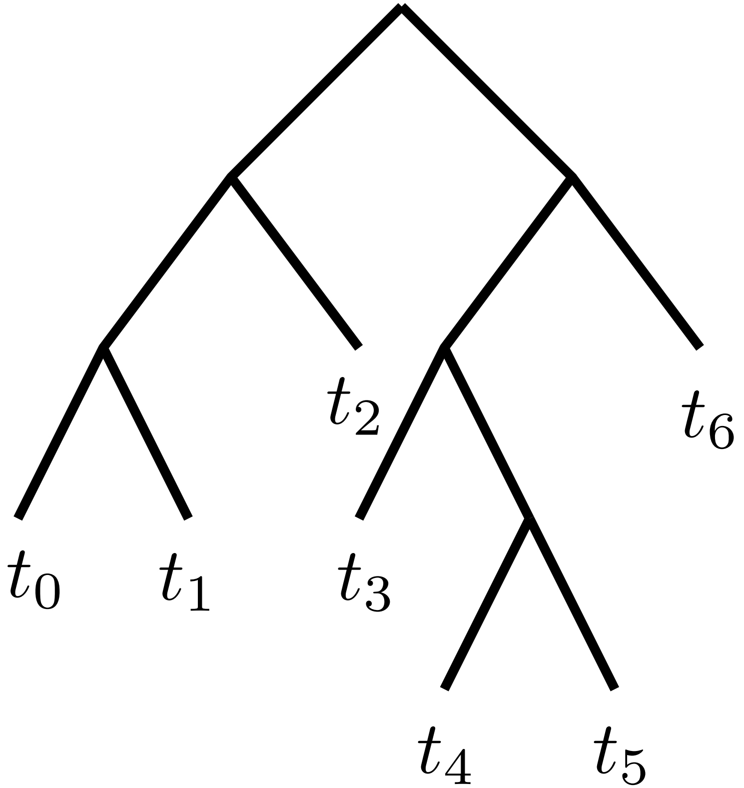


$1, 2, 5, 14, 42, 132, \ldots$

Triangulacije in polna binarna drevesa

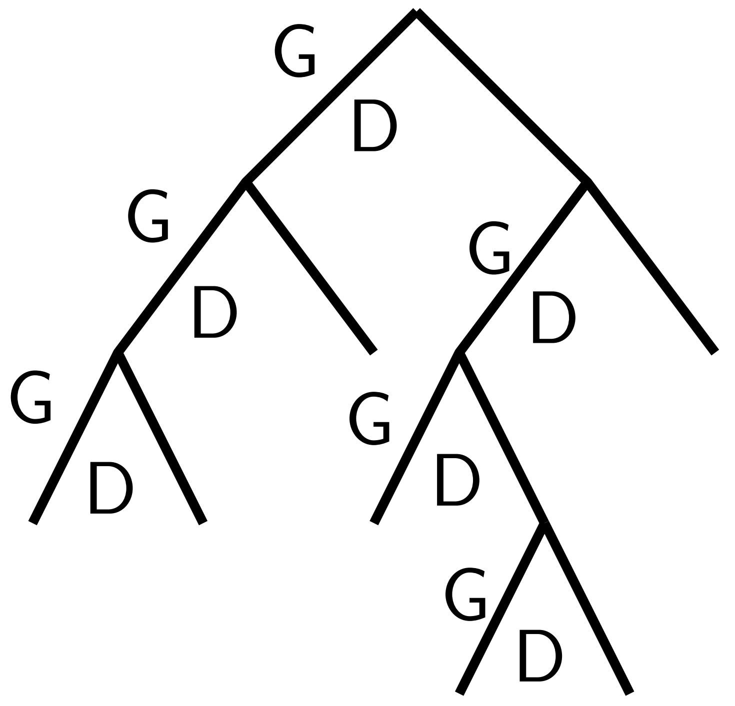


Postavitve oklepajev in polna binarna drevesa



$$((t_0t_1)t_2)((t_3(t_4t_5))t_6)$$

Dyckove poti in polna binarna drevesa



GGGDDDGGDGDD