Delta roboti in matematika

Štefko Miklavič

Univerza na Primorskem
UP FAMNIT in UP IAM

20. februar 2013

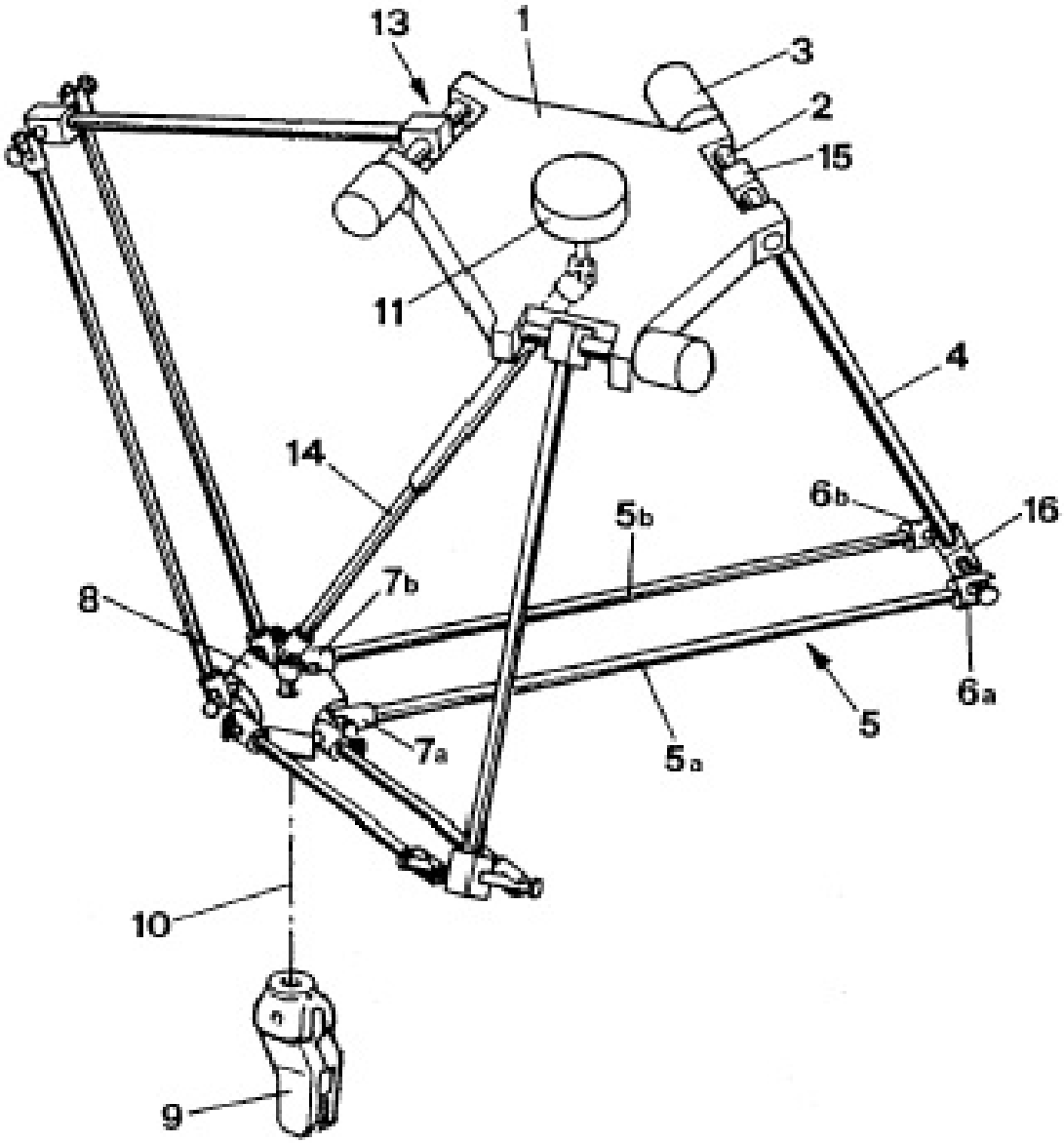
Viri

http://en.wikipedia.org/wiki/Delta_robot
http://forums.trossenrobotics.com

Reymond Clavel

Reymond Clavel, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne

Delta robot



Definicija problema

Če poznamo želeno pozicijo delovne ploščadi: kolikšen kot mora vsaka od treh rok v ramenu oklepati s fiksno ploščadjo, da bo delovna ploščad res v želeni poziciji?

Definicija problema

Če poznamo želeno pozicijo delovne ploščadi: kolikšen kot mora vsaka od treh rok v ramenu oklepati s fiksno ploščadjo, da bo delovna ploščad res v želeni poziciji?

Torej, če bi radi delovno ploščad premaknili v točko s koordinatami (x_0, y_0, z_0), potrebujemo funkcijo, ki nam iz danih podatkov x_0, y_0 in z_0 izračuna kote θ_1, θ_2 in θ_3, ki naj jih roke v ramenu oklepajo s fiksno ploščadjo (inverse kinematics).

Definicija problema

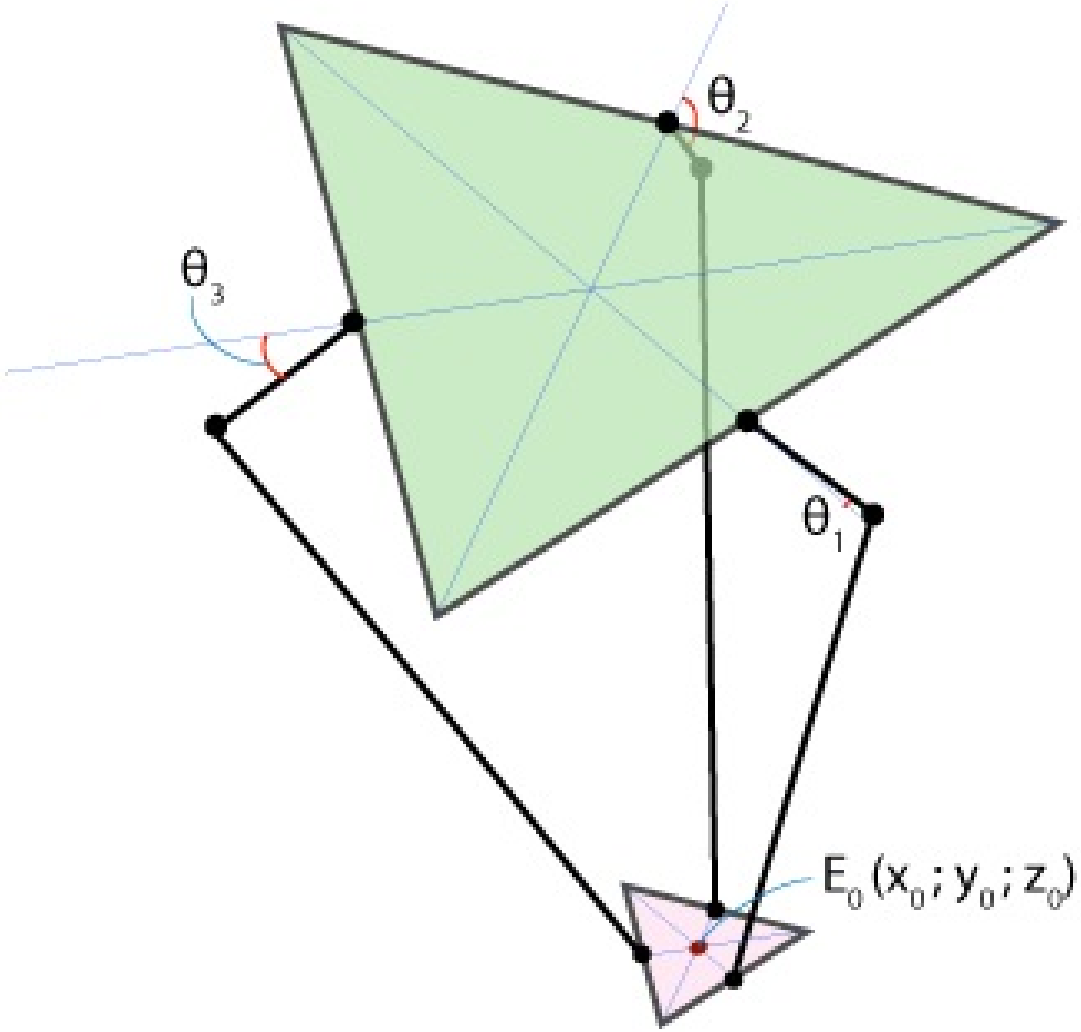
Če poznamo kote, ki jih s fiksno ploščadjo oklepajo roke, v kateri poziciji se nahaja delovna ploščad?

Definicija problema

Če poznamo kote, ki jih s fiksno ploščadjo oklepajo roke, v kateri poziciji se nahaja delovna ploščad?

Torej, če so koti, ki jih s fiksno ploščadjo oklepajo roke, enaki θ_1, θ_2 in θ_3, potrebujemo funkcijo, ki nam iz danih podatkov θ_1, θ_2 in θ_3 izračuna koordinate delovne ploščadi x_0, y_0 in z_0 (forward kinematics).

Shema



Oznake

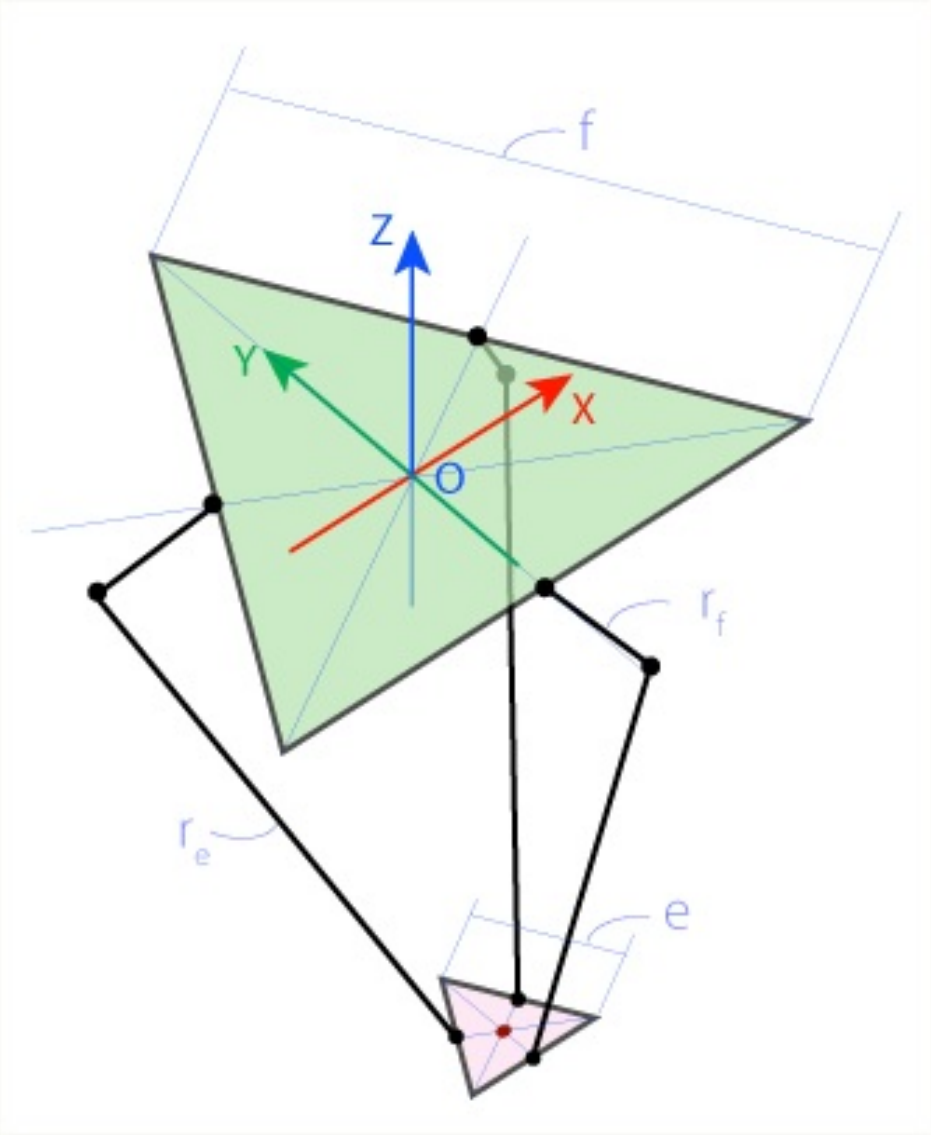
- f - dolžina stranice fiksne ploščadi
- e - dolžina stranice delovne ploščadi
- r_f - dolžina roke od ramena do komolca
- r_e - dolžina roke od komolca do zapestja

Oznake

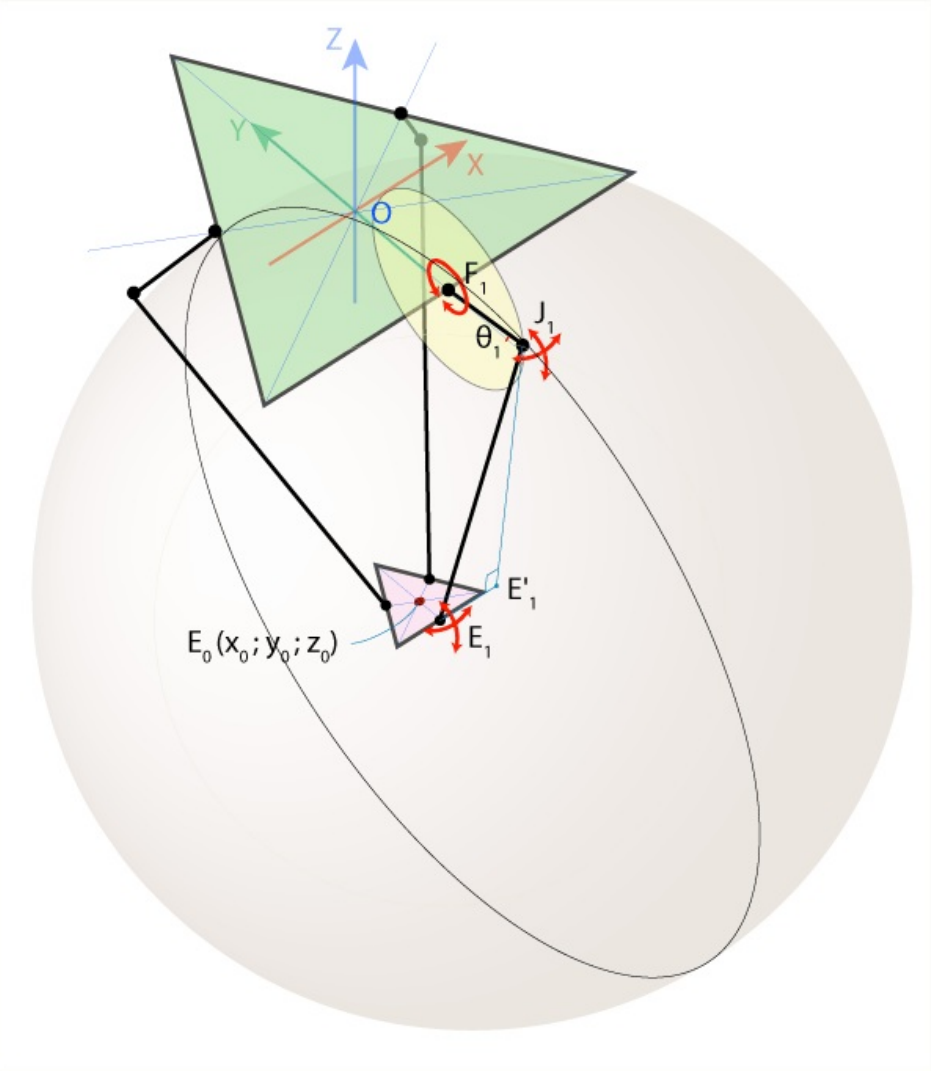
- f - dolžina stranice fiksne ploščadi
- e - dolžina stranice delovne ploščadi
- r_f - dolžina roke od ramena do komolca
- r_e - dolžina roke od komolca do zapestja

Koordinatni sistem postavimo tako, da je njegovo izhodišče v težišču trikotnika fiksne ploščadi, os y naj bo simetrala fiksne ploščadi, os z pa naj bo pravokotna na fiksno ploščad (tako da bo z-koordinata delovne ploščadi vedno negativna).

Oznake in koordinatni sistem



Shema



Inverzna kinematika

- $|OF_1| = \frac{f}{2}\tan 30^\circ = \frac{f}{2\sqrt{3}}$
- $F_1 = F_1(0, -\frac{f}{2\sqrt{3}}, 0)$
- Točka J_1 se nahaja na krožnici v yz ravnini s središčem v točki F_1 in radijem r_f:

$$(y + \frac{f}{2\sqrt{3}})^2 + z^2 = r_f^2$$

Inverzna kinematika

- $|E_0E_1| = \frac{e}{2}\tan 30^\circ = \frac{e}{2\sqrt{3}}$
- $E_1 = E_1(x_0, y_0 - \frac{e}{2\sqrt{3}}, z_0)$
- Točka J_1 se nahaja na krogli s središčem v točki E_1 in radijem r_e:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0 + \frac{e}{2\sqrt{3}})^2 + (z - z_0)^2 = r_e^2,$$

oziroma na presečišču te krogle z yz ravnino:

$$(y - y_0 + \frac{e}{2\sqrt{3}})^2 + (z - z_0)^2 = r_e^2 - x_0^2.$$

Inverzna kinematika

Točka J_1 je torej eno od dveh presečišč krožnic

$$(y + \frac{f}{2\sqrt{3}})^2 + z^2 = r_f^2$$

in

$$(y - y_0 + \frac{e}{2\sqrt{3}})^2 + (z - z_0)^2 = r_e^2 - x_0^2$$

(tisto presečišče, ki ima manjšo y koordinato).

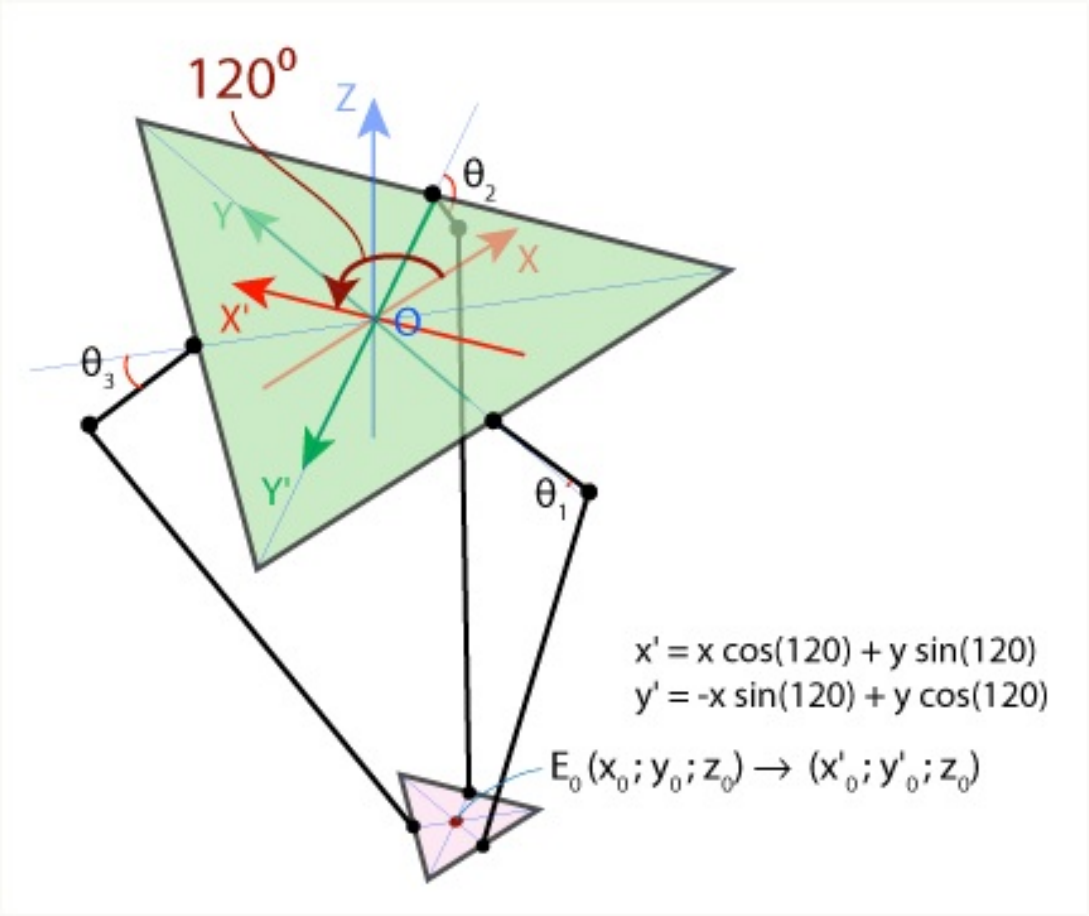
Inverzna kinematika

Kot θ_1 sedaj enostavno dobimo kot

$$\theta_1 = \arcsin \frac{z_{J_1}}{r_f},$$

kjer je z_{J_1} z-koordinata točke J_1.

Inverzna kinematika



Forward kinematics

Predpostavimo sedaj, da poznamo vse tri kote θ_1, θ_2 in θ_3. Želimo izračunati pozicijo delovne ploščadi.

Forward kinematics

Ker poznamo koordinate ramen $F_1(0, -f/(2\sqrt{3}), 0)$, $F_2(f/4, f/(4\sqrt{3}), 0)$ in $F_3(-f/4, f/(4\sqrt{3}), 0)$ ter kote θ_1, θ_2 in θ_3, lahko izračunamo koordinate točk J_1, J_2 in J_3:

$$J_1(0, -\frac{f}{2\sqrt{3}} - r_f \cos\theta_1, r_f \sin\theta_1),$$

$$J_2(\frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{f}{2\sqrt{3}} + r_f \cos\theta_2), \frac{1}{2}(\frac{f}{2\sqrt{3}} + r_f \cos\theta_2), r_f \sin\theta_2),$$

$$J_3(-\frac{\sqrt{3}}{2}(\frac{f}{2\sqrt{3}} + r_f \cos\theta_3), \frac{1}{2}(\frac{f}{2\sqrt{3}} + r_f \cos\theta_3), r_f \sin\theta_3).$$

Forward kinematics

Zapestja E_1, E_2 in E_3 ležijo na kroglah s središči v J_1, J_2, J_3 in polmeri r_e.

Forward kinematics

Zapestja E_1, E_2 in E_3 ležijo na kroglah s središči v J_1, J_2, J_3 in polmeri r_e.

Kroglo s središčem v J_1 premaknimo za vektor $\overrightarrow{E_1E_0}$, kroglo s središčem v J_2 premaknimo za vektor $\overrightarrow{E_2E_0}$, kroglo s središčem v J_3 premaknimo za vektor $\overrightarrow{E_3E_0}$.

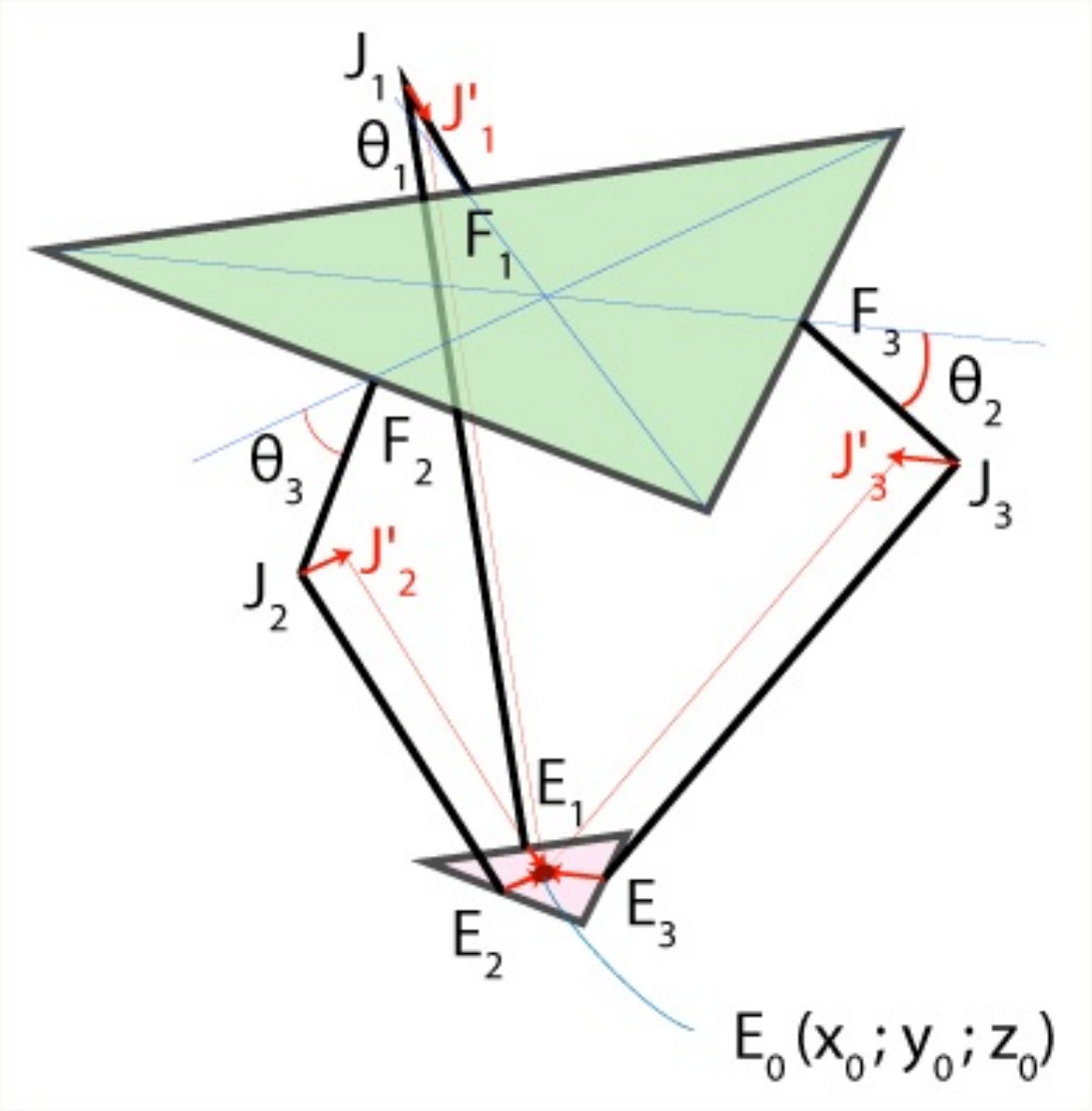
Forward kinematics

Zapestja E_1, E_2 in E_3 ležijo na kroglah s središči v J_1, J_2, J_3 in polmeri r_e.

Kroglo s središčem v J_1 premaknimo za vektor $\overrightarrow{E_1E_0}$, kroglo s središčem v J_2 premaknimo za vektor $\overrightarrow{E_2E_0}$, kroglo s središčem v J_3 premaknimo za vektor $\overrightarrow{E_3E_0}$.

Vsa tri zapestja E_1, E_2 in E_3 se premaknejo v središče delovne ploščadi E_0. Da bi torej dobili koordinate točke E_0, moramo izračunati presečišče teh treh premaknjenih krogel.

Foreward kinematcs



Forward kinematics

Točka E_1 ima koordinate $E_1(x_0, y_0 - e/(2\sqrt{3}), z_0)$, torej je vektor $\overrightarrow{E_1E_0} = (0, e/(2\sqrt{3}), 0)$. Točka J_1 se torej pri translaciji za vektor $\overrightarrow{E_1E_0}$ premakne v točko

$$J_1'(0, \frac{e-f}{2\sqrt{3}} - r_f \cos\theta_1, r_f \sin\theta_1).$$

Forward kinematics

Točka E_2 ima koordinate $E_2(x_0 + e/4, y_0 + e/(4\sqrt{3}), z_0)$, torej je vektor $\overrightarrow{E_2E_0} = (-e/4, -e/(4\sqrt{3}), 0)$. Točka J_2 se torej pri translaciji za vektor $\overrightarrow{E_2E_0}$ premakne v točko

$$J_2'(\frac{f-e}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} r_f \cos\theta_2, \frac{f-e}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{2} r_f \cos\theta_2, r_f \sin\theta_2).$$

Forward kinematics

Točka E_3 ima koordinate $E_3(x_0 - e/4, y_0 + e/(4\sqrt{3}), z_0)$, torej je vektor $\overrightarrow{E_3E_0} = (e/4, -e/(4\sqrt{3}), 0)$. Točka J_3 se torej pri translaciji za vektor $\overrightarrow{E_3E_0}$ premakne v točko

$$J_3'(\frac{e-f}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} r_f \cos\theta_3, \frac{f-e}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{2} r_f \cos\theta_3, r_f \sin\theta_3).$$

Forward kinematics

Naj bo sedaj $J_1'(x_1, y_1, z_1)$, $J_2'(x_2, y_2, z_2)$ in $J_3'(x_3, y_3, z_3)$. Poiskati moramo torej presečišče sfer

$$x^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = r_e^2 \tag{1}$$
$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = r_e^2 \tag{2}$$
$$(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = r_e^2 \tag{3}$$

Forward kinematics

Z odštevanjem zgornjih enačb $((1)-(2),(1)-(3),(2)-(3))$ dobimo

$$x_2x + (y_1 - y_2)y + (z_1 - z_2)z = \frac{w_1 - w_2}{2} \tag{4}$$

$$x_3x + (y_1 - y_3)y + (z_1 - z_3)z = \frac{w_1 - w_3}{2} \tag{5}$$

$$(x_2 - x_3)x + (y_2 - y_3)y + (z_2 - z_3)z = \frac{w_2 - w_3}{2} \tag{6}$$

kjer je $w_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$, $w_2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2$, $w_3 = x_3^2 + y_3^2 + z_3^2$.

Forward kinematics

Iz enačb (4), (5) in (6) izrazimo x in y:

$x = a_1 z + b_1$, $y = a_2 z + b_2$, kjer je

$$a_1 = \frac{(z_2 - z_1)(y_3 - y_1) - (z_3 - z_1)(y_2 - y_1)}{(y_2 - y_1)x_3 - (y_3 - y_1)x_2},$$

$$a_2 = -\frac{(z_2 - z_1)x_3 - (z_3 - z_1)x_2}{(y_2 - y_1)x_3 - (y_3 - y_1)x_2},$$

$$b_1 = -\frac{(w_2 - w_1)(y_3 - y_1) - (w_3 - w_1)(y_2 - y_1)}{2((y_2 - y_1)x_3 - (y_3 - y_1)x_2)},$$

$$b_2 = \frac{(w_2 - w_1)x_3 - (w_3 - w_1)x_2}{2((y_2 - y_1)x_3 - (y_3 - y_1)x_2)}.$$

Forward kinematics

Iz enačbe (1) sedaj dobimo

$$(a_1^2+a_2^2+1)z^2+2(a_1+a_2(b_2-y_1)-z_1)z+(b_1^2+(b_2-y_1)^2+z_1^2-r_e^2)=0$$

(izmed dveh rešitev izberemo manjšo), ter izračunamo še x in y koordinato točke E_0.

HVALA !!!